前　言

《高等代数》是高等学校数学专业的一门基础课，也是理工科其它一些专业学习的内容，编写一本好的参考读物无疑是有重要意义的，笔者多年来一直为此而努力。1986年，孙宗明写成3万余字的材料，铅印发给学生，可以作为本书的第一稿，初步形成了本书的体例；1988年，由孙宗明执笔、并与张纯伯合作完成27万余字的材料，油印发给学生，作为本书的第二稿，确定了本书的体例；1989年1月开始，孙宗明先后联络17个省的25位代数学同行，组织对第二稿进行修订，历经一年有余，终于形成了本书的原稿(第三稿)。

本书与北京大学编《高等代数》1988年版本相吻合，同样地分为十一章。而每章均分为"概括说明"、"内容提要"、"重点难点"、"习题类解"、"补充资料"、"基本习题"六节，对高等代数的内容与方法进行了全面的阐述，与已出版的同类书籍相比，具有体例新颖、内容丰富的特点，经在几届学生中试用，效果良好。

侯根明（山西吕梁教育学院）、乔凤珠（内蒙古师大）、李振国（内蒙河套大学）、高明谦（吉林师院）、江占文（黑龙江佳木斯师专）、周晓钟（齐齐哈尔师院）、章仲英（江苏徐州师院）、高建筑（安徽巢湖师专）、王灿照（福建龙岩师专）、吴丹柱（江西景德镇教育学院）、王文省（山东聊城师院）、姚存峰（济宁师专）、李玉文（德州教育学院）、王新民(昌潍师专)、姜同松（临沂师专）、叶伯诚（临沂师专）、张纯伯（泰安师专)、贾周（河南师大）、张正才（湖北黄冈教育学院）、陈进之（湖南益阳师专）、周楚昌（广东佛山大学）、薛育海（四川师院）、冯发良（陕西宝鸡师院）、徐兆亮（甘肃西北师大）、伊保林（青海民院）诸位具有中高级职称的同志(按省顺序列出)参加了对第二稿总的修订，主要工作是：对于每章的"重点难点"发表意见，改正第二稿中的错误，补充精彩的习题与内容，补充

参考书目。其中，王灿照、高建筑、叶伯诚、张正才、王新民、姚存峰、乔凤珠、李振国、周晓钟、王文省诸位同志还分别（顺次）对第一至第九章、第十一章作了修订，主要工作是：将所分工章的“§3重点难点”扩充，广泛征求本单位同行的意见，详细论述解决难点的方法；对“§5补充资料”中的“历史资料点滴”作补充，写成较系统的材料；对“§4习题类解”中每类习题的分析进行扩写，补充个别题型，调换少部分例题；并对其余各节发表意见。因此，第三稿是集合众多同行的经验与智慧，在第二稿的基础上修订而成的。

本书由泰安师范专科学校数学系副教授孙宗明任主编，叶伯诚、乔凤珠、张纯伯任副主编，张纯伯任责任副主编。

主编孙宗明，以第二稿为依据，吸收各参编同行的修订材料，最后执笔定稿。乔凤珠、张纯伯、叶伯诚、王文省、李振国协助孙宗明，做了一些工作。各位参编者是参考北京大学编《高等代数》1978年版进行修订的，在定稿时已见到1988年版，孙宗明参考新版定稿并独立完成新版中新增设的《双线性函数》一章。

在本书的十一章之后，还有两个“目录”与五个“附录”，均为孙宗明等的独立之作，同样是本书的重要组成部分。

兰州大学数学系郭聿琦教授、聊城师范学院数学系杨子胥教授、山东师范大学数学系李师正教授作为本书的审校，付出了辛苦的劳动，提出了许多宝贵的意见，他们还共同向兰州大学出版社推荐本书，编者对他们致以衷心的感谢。兰州大学出版社对本书的出版十分关心，做了很多工作，在此深致谢意。

编者虽从事《高等代数》教学多年，也进行过某些代数学问题的学习和研究，但由于水平所限，难免有不妥之处，敬请同行与读者批评指正。

编　者

1990年3月

目　录

第一章 多 项 式

§1 概括说明

多项式理论是高等代数的重要内容，是学习代数学及其它数学分支的必要的基础，是中学数学有关知识的加深和扩充。

在高等代数的许多部分都用到多项式的概念及理论，如：矩阵的多项式、线性变换的多项式、特征多项式等。多项式在抽象代数学中扮演着重要角色，多项式环是抽象环的三大背景（整数环、多项式环、矩阵环）之一，在扩域的理论中常常谈及多项式的根。多项式函数是基本函数，用多项式函数去逼近比较复杂的函数，是数学分析等学科中重要的研究课题之一。

本章的内容分为四个部分：数域，一般数域F上的一元多项式，特殊数域Q、R、C上的一元多项式，一般数域F上的多元多项式。

本章先建立数环与数域的概念，作为研究多项式理论的基础，同时也作为本书中研究其它一些对象的基础。我们研究问题，总是在一个确定的数域上进行，这与中学数学相比，具有更高的严格性与确定性。

本章主要研究数域F上的一元多项式，可归纳为如下四个小部分：一般理论（定义、次数、运算），整除理论（整除、最大公因式、互素），因式分解理论（不可约多项式、因式分解定理、标准分解式、重因式），根的理论（多项式的值、多项式的根、根的个数、多项式函数）。

对于有理数域Q、实数域R、复数域C这三个常用的数域而言，一元多项式的理论还有一些更深入的结果。特别地，我们将

给出$R(x)$、$C(x)$中多项式的标准分解式，讨论根的性质．这也是本章的重要内容之一．

在一元多项式的讨论中，整除是基础，因式分解是中心，而因式分解又与根紧密联系，要抓住整除、分解、根这三个问题及其相互关联，使一元多项式理论成为一个有机体．

本章还要研究数域F上的多元多项式的基本理论，分为四个小部分：多元多项式的概念，齐次多项式，对称多项式，一元多项式根的判别式．

本章的补充资料是：最小公倍式，整数的整除理论与因数分解理论，实根的界和个数，多元多项式的整除与因式分解，历史资料点滴．

§2 内容提要

I 数域

设M是一个非空数集．若M中任意两个数作某一运算的结果仍在M中，则称M对于该种运算是封闭的．

设S是一个非空数集．若对于任意的 $a, b\in S$，都有 $a+b$，$a-b$，$ab\in S$，换言之，S对于加法、减法、乘法封闭，则称S是一个数环．

$\{0\}$是数环．整数集Z是数环．若S_1，S_2是数环，则 $S_1\cap S_2$是数环．任何数环都包含零数环$\{0\}$．若S是数环，且$1\in S$，则S包含整数环Z．零数环$\{0\}$是唯一的有限数环．

设F是一个至少含有两个数的数集．若对于任意的$a,b\in F$，都有$a+b$，$a-b$，$ab\in F$，而当$b\neq 0$时还有$a/b\in F$，换言之，F对于加法、减法、乘法、除法（除数不为零）都封闭，则称F是一个数域．显然，数域是数环．

若F是数域，则 0，$1\in F$．有理数集Q，实数集R，复数集C都是数域．若F_1，F_2是数域，则$F_1\cap F_2$是数域．数域都是无限

集合。

任意数域都包含有理数域，换言之，有理数域是最小的数域。存在无穷多个互异的数域。

Ⅱ　一般数域F上的一元多项式

一　一般理论

1　概念

设F是一个数域，x是一个文字，n是一个非负整数，$a_0, a_1, \cdots, a_n \in F$。形式表达式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0$（或$a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$）称为系数在数域F中的一元多项式，或者简称为数域F上的一元多项式。记为$f(x)$，$g(x)$，…等。并且，常用连加号缩写。例如

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

形式表达式的意思是，仅作为一个字符系统。即“＋”号并不意味着“加”，$a_i x^i$ 并不意味着a_i乘以x^i，而x^i也并不意味着x的i次幂。总之，就是一个如此写出的东西而已。

$a_i x^i$称为$f(x)$的i次项，a_i称为i次项的系数。满足$a_n \neq 0$的最大整数n称为$f(x)$的次数，记为$deg(f(x)) = n$，a_n称为$f(x)$的首项系数，当$a_n = 1$时，称$f(x)$为首1多项式。系数全为零的多项式称为零多项式，记为0。零多项式没有“次数”的概念。$f(x)$是零次多项式当且仅当$f(x)$是F中的一非零常数，因此，绝不能把零次多项式与零多项式混同起来。

约定：1）系数是零的项可以省略不写（从而，自然也可以添上一些系数是零的项）；2）系数是1的项可以把系数1省略不写；3）x^1写为x；4）x^0写为1，$a_0 x^0$简写为a_0，从而，零次项称为常数项。

若$f(x)$与$g(x)$都是数域F上的多项式，且同次项的系数均相

等，则称$f(x)$与$g(x)$相等，记为$f(x)=g(x)$．从而，相等的多项式是完全一样的，可以写为完全相同的形式．这就是通常比较系数法的依据．

2　运算

设$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i$，$g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_j x^j$，不妨设$m\leqslant n$，从而再设$b_{m+1}=\cdots=b_n=0$，则多项式$\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$称为$f(x)$与$g(x)$的和，记为$f(x)+g(x)$．多项式$\sum_{s=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=s}a_i b_j\right)x^s$称为$f(x)$与$g(x)$的积，记为$f(x)g(x)$．多项式$\sum_{i=0}^{n}(-a_i)x^i$称为$f(x)$的负多项式，记为$-f(x)$．多项式$f(x)+(-g(x))$称为$f(x)$与$g(x)$的差，记为$f(x)-g(x)$．

对于任意的$f(x),g(x)$,成立：1）$f(x)+0=0+f(x)=f(x)$;2）$f(x)0=0f(x)=0$;3）$f(x)1=1f(x)=f(x)$;4）$f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$；5）$f(x)-0=f(x)$；6）$k\in \mathbf{F}$,

$$kf(x)=k\left(\sum_{i=0}^{n}a_i x^i\right)=\sum_{i=0}^{n}(ka_i)x^i=f(x)k.$$

多项式的加法与乘法运算，满足下列规律：

1）加法交换律　$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$；

2）加法结合律

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x));$$

3）乘法交换律　$f(x)g(x)=g(x)f(x)$；

4）乘法结合律　$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$；

5）乘法对加法的分配律

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x);$$

6）乘法消去律　$f(x)g(x)=f(x)h(x)$，$f(x)\neq 0\Rightarrow g(x)=h(x)$，其中$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$是任意的多项式。

3　次数定理

若$f(x)$，$g(x)$是数域F上的两个多项式，且$f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$，则，1）当$f(x)+g(x)\neq 0$时，$deg(f(x)+g(x))\leqslant max(deg(f(x)),deg(g(x)))$；2）$deg(f(x)g(x))=deg(f(x))+deg(g(x))$。

$f(x)g(x)=0$ 的必要充分条件是$f(x)$与$g(x)$之中至少有一个是零多项式。

4　一元多项式环

数域F上文字 x 的一元多项式的全体，连同它们的加法与乘法运算一起组成的系统，称为数域F上的一元多项式环，记为F〔x〕。

以后我们将知道，“环”是一个代数系统，并且 F〔x〕对于多项式的加法与乘法作成一个环。

二　整除理论

1　带余除法

带余除法定理.对于F〔x〕中的任意两个多项式$f(x)$与$g(x)$，其中$g(x)\neq 0$，一定有F〔x〕中的多项式$q(x)$与$r(x)$，使得$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，其中$r(x)=0$或$deg(r(x))<deg(g(x))$，并且，这样的$q(x)$，$r(x)$是唯一确定的。

定理中的$q(x)$，$r(x)$分别称为$g(x)$除$f(x)$的商式与余式。关于$q(x)$，$r(x)$的求法，使用通常的除法即可，一般称之为长除法。

综合除法定理。设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$a_n\neq 0$，$n\geqslant 1$，$f(x)=q(x)(x-c)+r$，$q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$，则$b_{n-1}=a_n,b_{n-2}=a_{n-1}+cb_{n-1}$，$b_{n-3}=a_{n-2}+cb_{n-2}$，$\cdots$，$b_1=a_2+cb_2$，$b_0=a_1+cb_1$，$r=a_0$

$+cb_0$，从而确定了 $q(x)$ 与r，并且可以用下列格式将计算程序表示出来，称为综合除法。

$$\begin{array}{cccccc|l} a_n & a_{n-1} & a_{n-2}\cdots a_1 & a_0 & & c \\ +) & cb_{n-1} & cb_{n-2}\cdots cb_1 & cb_0 & & \\ \hline b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3}\cdots\ b_0 & r & & \end{array}$$

设$f(x)=(ax+b)Q(x)+R$，$a\neq 0$，

$f(x)=\left(x-\left(-\frac{b}{a}\right)\right)q(x)+r$，则$Q(x)=\frac{q(x)}{a}$，$R=r$。

利用综合除法可以把$f(x)$表示成 $x-c$ 的方幂和的形式：若$f(x)=(x-c)f_1(x)+b_0$，$f_1(x)=(x-c)f_2(x)+b_1$，$f_2(x)=(x-c)f_3(x)+b_2$，$\cdots$，$f_{n-2}(x)=(x-c)f_{n-1}(x)+b_{n-2}$，$f_{n-1}(x)=(x-c)b_n+b_{n-1}$，则 $f(x)=b_n(x-c)^n+b_{n-1}(x-c)^{n-1}+\cdots+b_1(x-c)+b_0$。

反过来，由$f(x)$的$x-c$的方幂和的形式，可写成x的多项式的形式：设$f(x)=b_n(x-c)^n+b_{n-1}(x-c)^{n-1}+\cdots+b_1(x-c)+b_0$，令$x=y+c$，则 $f(y+c)=b_ny^n+b_{n-1}y^{n-1}+\cdots+b_1y+b_0\overset{\text{记为}}{=\!=}g(y)$，利用综合除法可以把$g(y)$表示成$y+c$的方幂和的形式，即 $g(y)=f(y+c)=a_n(y+c)^n+a_{n-1}(y+c)^{n-1}+\cdots+a_1(y+c)+a_0$，则$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$。

若$f(x)$，$g(x)\in \mathbf{F}[x]$，$f(x)\neq 0$，$deg(g(x))\geqslant 1$，则在$\mathbf{F}[x]$中有唯一的多项式组$r_0(x)$，$r_1(x)$，$\cdots$，$r_{k-1}(x)$，$q_k(x)$，使得$f(x)=q_k(x)g^k(x)+r_{k-1}(x)g^{k-1}(x)+\cdots+r_1(x)g(x)+r_0(x)$，其中 $q_k(x)\neq 0$，且 $deg(q_k(x))<deg(g(x))$，$g^0(x)=1$，而$r_i(x)=0$或$deg(r_i(x))<deg(g(x))$，$i=0$，1，$\cdots$，$k-1$，$f(x)$的上述表达式，称为 $f(x)$ 按$g(x)$的展开式。事实上，这是前面结果的推广。

2　整除的概念

定义．设 $f(x)$，$g(x)\in \mathbf{F}[x]$．若有 $h(x)\in \mathbf{F}[x]$，使得 $f(x)=g(x)h(x)$，则称多项式 $g(x)$ 整除多项式 $f(x)$，记为 $g(x)|f(x)$．否则，即，对于任意 $h(x)\in \mathbf{F}[x]$，均有 $f(x)\neq g(x)h(x)$，则称 $g(x)$ 不整除 $f(x)$，记为 $g(x)\nmid f(x)$．当 $g(x)|f(x)$ 时，称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的倍式，而当 $g(x)\neq 0$ 时，$f(x)/g(x)$ 表示 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得的商式．

整除具有下列性质：1）对任意 $f(x)$，有 $f(x)|0$，从而零多项式有任意高次的因式；2）$0|f(x)\Leftrightarrow f(x)=0$；3）零次多项式整除任意多项式；4）对任意 $f(x)$ 及任意 $c\in \mathbf{F}$，$c\neq 0$，成立 $f(x)|cf(x)$，$cf(x)|f(x)$；5）对任意 $f(x)$ 及任意 $c\in \mathbf{F}$，$c\neq 0$，成立：$g(x)|f(x)\Leftrightarrow g(x)|cf(x)$，从而，$f(x)$ 与 $cf(x)$ 有相同的因式；$cg(x)|f(x)\Leftrightarrow g(x)|f(x)$，从而，$g(x)$ 与 $cg(x)$ 有相同的倍式；6）任意多项式 $f(x)$ 都有 c 与 $cf(x)(c\in \mathbf{F}，c\neq 0)$ 这两个因式，称为 $f(x)$ 的平凡因式；7）非零多项式的次数不低于其因式的次数，即，$f(x)\neq 0$，$g(x)|f(x)\Rightarrow g(x)\neq 0$ 且 $deg(g(x))\leqslant deg(f(x))$；8）$f(x)|g(x)$，$g(x)|h(x)\Rightarrow f(x)|h(x)$，即，传递性成立；9）$f(x)|g(x)$ 不能推出 $g(x)|f(x)$，即，对称性不成立；10）$f(x)|g(x)$，$g(x)|f(x)\Leftrightarrow f(x)=cg(x)$，$c\in \mathbf{F}, c\neq 0$；11）$f(x)$ 整除 $g(x)$，$h(x)$ 之一 $\Rightarrow f(x)|g(x)h(x)$；12）$f(x)|g_i(x)$，任意 $h_i(x)\in \mathbf{F}[x]$，$i=1, 2, \cdots, t\Rightarrow f(x)|(g_1(x)h_1(x)+\cdots+g_t(x)h_t(x))$，称为，$f(x)$ 整除 $g_1(x)$，$\cdots$，$g_t(x)$ 的一个组合．

整除的判定：$g(x)=0$ 时，$g(x)|f(x)\Leftrightarrow f(x)=0$；而 $g(x)\neq 0$ 时，$g(x)|f(x)\Leftrightarrow g(x)$ 除 $f(x)$ 所得余式为0．

整除关系不因数域的扩大而改变．

3 最大公因式

定义．设 $f(x)$，$g(x)\in \mathbf{F}[x]$．若有 $d(x)\in \mathbf{F}[x]$，使得，1）$d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$，即 $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的公因式；

2）$\phi(x)\in F[x]$，$\phi(x)|f(x)$，$\phi(x)|g(x)\Rightarrow\phi(x)|d(x)$，即$f(x)$，$g(x)$的公因式都是$d(x)$的因式，则称$d(x)$是$f(x)$，$g(x)$的一个最大公因式。

简单性质：1）任意$f(x)$与非零常数c的一个最大公因式是c；2）$g(x)|f(x)\Rightarrow g(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式；3）$f(x)$与$g(x)$的最大公因式是$0\Leftrightarrow f(x)=g(x)=0$。

唯一性。若$d(x)$是$f(x)$，$g(x)$的一个最大公因式，则$cd(x)(c\in F，c\neq0)$是$f(x)$，$g(x)$的最大公因式；并且，只有这样的乘积$cd(x)$是$f(x)$，$g(x)$的最大公因式。换言之，若不计非零常数因式的差别，$f(x)$，$g(x)$的最大公因式是唯一的。称为相对唯一性（或基本唯一性）。

当$f(x)$，$g(x)$不全为零时，用$(f(x)，g(x))$表示$f(x)$，$g(x)$的首项系数为1的最大公因式；当$f(x)=g(x)=0$时，$(f(x)，g(x))$表示0。从而，特殊的最大公因式$(f(x)，g(x))$是唯一的。称为绝对唯一性。

存在性。$F[x]$中的任意两个多项式$f(x)$，$g(x)$的最大公因式$d(x)$是存在的。并且，当$f(x)=g(x)=0$时，$d(x)=0$；当$f(x)=0$，$g(x)\neq0$时，$d(x)=g(x)$；当$f(x)\neq0$，$g(x)\neq0$时，可以用辗转相除法求得$d(x)$。

表示为组合。$f(x)$，$g(x)$的最大公因式$d(x)$可以表示为$f(x)$，$g(x)$的一个组合。即，存在$u(x)$，$v(x)\in F[x]$，使得$d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$。

上面的等式为理论上的证明带来方便。等式中的$u(x)$、$v(x)$不是唯一的，而且有无限多对。

若$d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$，则$d(x)$是$f(x)$，$g(x)$的最大公因式$\Leftrightarrow d(x)$是$f(x)$，$g(x)$的公因式。

最大公因式不因数域的扩大而改变。

前面论述的两个多项式的最大公因式的理论，对于多个多项项

式的最大公因式，类似地成立。

求多个多项式的最大公因式，转化为求两个多项式的最大公因式，基于下面的公式（$s\geqslant 3$）

$$\begin{aligned}&(f_1(x),f_2(x),f_3(x),\cdots,f_s(x))\\&=((\cdots((f_1(x),f_2(x)),f_3(x)),\cdots),f_s(x)).\end{aligned}$$

4　互素

定义．若 $f(x)$，$g(x)$ 的最大公因式是非零常数，即，$(f(x),\ g(x))=1$，则称$f(x)$，$g(x)$互素，常记为

$$(f(x),g(x))=1.$$

互素的判定．$\mathbf{F}[x]$中的多项式$f(x)$，$g(x)$互素$\Leftrightarrow\mathbf{F}[x]$中有多项式$u(x)$，$v(x)$，使得$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$．

互素的性质：

1）$f(x)\mid g(x)h(x)$，$(f(x),\ g(x))=1\Rightarrow f(x)\mid h(x)$；

2）$f_1(x)\mid g(x)$，$f_2(x)\mid g(x)$，$(f_1(x),\ f_2(x))=1\Rightarrow f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$；

3）$(f(x),\ h(x))=1$，$(g(x),\ h(x))=1\Leftrightarrow(f(x)g(x),\ h(x))=1$．

最大公因式与互素的关系．若 $f(x)$，$g(x)$ 不全为0，则 $(f(x),\ g(x))=d(x)\Leftrightarrow(f_1(x),\ g_1(x))=1$，$f(x)==f_1(x)d(x)$，$g(x)=g_1(x)d(x)$．

互素不因数域的扩大而改变．

上面讨论了两个多项式互素，类似地，可以讨论多个多项式互素．设有多项式$f_1(x),f_2(x)$，…，$f_s(x)$，$s\geqslant 2$．若其中任意两个多项式都互素，则称$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$两两互素．于是，称$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$互素为整体互素．若$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$两两互素，则$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$ 必整体互素；反之不然．

三　因式分解理论

1 不可约多项式

若$F[x]$中的$n(n>0)$次多项式$f(x)$能够分解为 $F[x]$中的两个次数都小于n的多项式$g(x)$与$h(x)$的乘积，则称$f(x)$在$F[x]$中可约，或称$f(x)$在F上可约．否则，即$f(x)$在$F[x]$中仅有平凡因式，则称$f(x)$ 在 $F[x]$中不可约，称 $f(x)$ 是不可约多项式．

对于正次数的多项式，谈论可约与不可约的问题；对于零多项式及零次多项式，不谈论可约与不可约的问题．

任意一次多项式在任意数域上总是不可约的．

多项式的可约性是相对于给定的数域而言的，随着数域的改变而改变．

不可约多项式的性质：

1）$p(x)$是不可约多项式$\Leftrightarrow cp(x)$是不可约多项式，$c\neq 0$；

2）次数>0的多项式$p(x)$是不可约多项式$\Leftrightarrow$对任意$f(x)$，有且仅有$p(x)|f(x)$与$(p(x),\ f(x))=1$之一；

3）次数>0的多项式$p(x)$是不可约多项式$\Leftrightarrow$对任意$f(x)$，$g(x)$，由$p(x)|f(x)g(x)$得出$p(x)|f(x)$或$p(x)|g(x)$；

4）$p(x)$ 是不可约多项式，$p(x)|f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)\Rightarrow p(x)$至少整除$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$之一；

5）$F[x]$中一正次数多项式$f(x)$的最低正次数的因式一定是不可约的，从而$f(x)$一定被$F[x]$ 中的某个不可约多项式整除．

2 唯一因式分解定理

数域F上的每一个次数>0的多项式$f(x)$ 都可以唯一地分解为数域F上的有限个不可约多项式的乘积．所谓唯一性是说，若有$f(x)$的两个分解式$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$，则必有 $s=t$，并且适当调换因式的次序后有 $p_i(x)=c_iq_i(x)$，$c_i\in F$，$c_i\neq 0$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ s$．

3 标准分解式

数域F上的每一个次数>0的多项式$f(x)$都能唯一（不计因子次序）地写为$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$，其中$p_i(x)(i=1, 2, \cdots, s)$是F[$x$]中互异的首1不可约多项式，$r_i(i=1, 2, \cdots, s)$是正整数，$a$是$f(x)$的首项系数.称为$f(x)$的标准分解式（或典型分解式）.

对任意$h(x)$，r为正整数，$h^r(x)$表示r个$h(x)$相乘；对于$h(x)\neq 0$，$h^0(x)=(h(x))^0=1$.

若$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$是标准分解式，则$g(x)|f(x)\Leftrightarrow g(x)=bp_1^{\delta_1}(x)p_2^{\delta_2}(x)\cdots p_s^{\delta_s}(x)$，$b\in$ F，$b\neq 0, 0\leqslant\delta_i\leqslant r_i$，$i=1, 2, \cdots, s$.

若$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x), g(x)=bp_1^{\lambda_1}(x)\cdot p_2^{\lambda_2}(x)\cdots p_s^{\lambda_s}(x)$，$a\neq 0$，$b\neq 0$，$p_i(x)(i=1,2, \cdots, s)$是互异的首1不可约多项式，$r_i$，$\lambda_i(i=1, 2, \cdots, s)$是非负整数，则$(f(x), g(x))=p_1^{\alpha_1}(x)p_2^{\alpha_2}(x)\cdots p_s^{\alpha_s}(x)$，$\alpha_i=\min(r_i, \lambda_i)$，$i=1, 2, \cdots, s$.

应用标准分解式，从理论上研究整除与最大公因式，证明某些结论，是十分方便的.但是，在实践上绝不能代替带余除法与辗转相除法.

4 重因式

F[x]中的多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$的导数（或微商）是指F[$x$]中的多项式$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$($f(x)=c, c\in$ F时，$f'(x)=0$).$f'(x)$称为$f(x)$的一阶导数.一阶导数$f'(x)$的导数称为$f(x)$的二阶导数，记作$f''(x)$.$f''(x)$的导数称为$f(x)$的三阶导数，记作$f'''(x)$.….$f(x)$的k（$k>3$）阶导数记作$f^{(k)}(x)$.

用定义容易验证多项式的下列求导公式：$(f(x)+g(x))'$

$=f'(x)+g'(x)$，$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$，

$(cf(x))'=cf'(x)$，$\left(\prod_{i=1}^{m} f_i(x)\right)'=\sum_{i=1}^{m}(f_i'(x)\prod_{j\neq i}f_j(x))$，

$(f^m(x))'=mf^{m-1}(x)f'(x)$。

设$p(x)$是不可约多项式，k是非负整数。若 $p^k(x)|f(x)$，而$p^{k+1}(x)\nmid f(x)$，则称$p(x)$是$f(x)$的k重因式，k称为重数。$k=1$时，$p(x)$称为$f(x)$的单因式；$k>1$时，$p(x)$称为$f(x)$的重因式；$k=0$时，$p(x)$ 根本不是 $f(x)$ 的因式，为方便，称为$f(x)$的零重因式。

不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式$\Leftrightarrow f(x)=p^k(x)g(x)$，$p(x)\nmid g(x)$。

若 $f(x)=ap_1{}^{r_1}(x)p_2{}^{r_2}(x)\cdots p_s{}^{r_s}(x)$是标准分解式，则$p_i(x)$是$f(x)$的$r_i$重因式，$i=1$，2，…，$s$。

重因式定理．若$p(x)$是$f(x)$的k（$k\geqslant1$）重因式，则 $p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式．特别地，$f(x)$的单因式不是 $f'(x)$的因式。

若$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式，$k\geqslant1$，则$p(x)$是$f(x)$的k重因式$\Leftrightarrow p(x)|f(x)$。

设$p(x)$是不可约多项式，$k\geqslant1$，则$p(x)$ 是 $f(x)$的k重因式$\Leftrightarrow p(x)$是$f(x),f'(x),\cdots$，$f^{(k-1)}(x)$的因式，但不是$f^{(k)}(x)$的因式。

$p(x)$是$f(x)$的重因式$\Leftrightarrow p(x)$是$f(x)$与$f'(x)$的公因式。

$f(x)$没有重因式$\Leftrightarrow(f(x)$，$f'(x))=1$．由此可以判定$f(x)$有无重因式．并且，$f(x)$有无重因式不因数域的改变而改变。

若$(f(x)$，$f'(x))=d(x)$，$k\geqslant1$，则，1）$p(x)$是$d(x)$的k重因式$\Leftrightarrow p(x)$是$f(x)$的$k+1$重因式；2）$p(x)$是$d(x)$ 的不可约因式$\Leftrightarrow p(x)$是$f(x)$的重因式。

分离重因式。

若$deg(f(x))\geqslant 1$，则$f(x)/(f(x), f'(x))$没有重因式，且与$f(x)$有相同的不可约因式。

求$f(x)$的标准分解式：1)求$f(x)$的所有不可约因式$p_1(x)$, $p_2(x),\cdots,p_s(x)$.由上，转化为求次数较低的且没有重因式的多项式$f(x)/(f(x),f'(x))$的不可约因式；2)对每个$p_i(x)$，确定r_i，使$p_i^{r_i}(x)|f(x)$，但$p_i^{r_i+1}(x)\nmid f(x)$，只要进行一系列除法即可以，$f(x)=p_i(x)f_1(x)$，$f_1(x)=p_i(x)f_2(x)$，…，$f_{r_i-1}(x)=p_i(x)f_{r_i}(x)$，$p_i(x)\nmid f_{r_i}(x)$。

设$f(x)$的标准分解式是 $f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$，因式的最高重数是$r(r>1)$，1)令$F_i(x)$是一切$i$重因式之积，$i=1, 2, \cdots, r$，则$f(x)=aF_1(x)F_2^2(x)\cdots F_r^r(x)$；2)令$d_1(x)=(f(x), f'(x))$，$d_2(x)=(d_1(x), d_1'(x))$，$\cdots$，$d_k(x)=(d_{k-1}(x), d'_{k-1}(x))$，$\cdots$，$d_r(x)=(d_{r-1}(x), d'_{r-1}(x))$，则 $d_1(x)=F_2(x)F_3^2(x)\cdots F_r^{r-1}(x)$，$d_2(x)=F_3(x)F_4^2(x)\cdots F_r^{r-2}(x)$，$d_3(x)=F_4(x)F_5^2(x)\cdots F_r^{r-3}(x)$，$\cdots$，$d_{r-1}(x)=F_r(x)$，$d_r(x)=1$；3)$h_1(x)=f(x)/d_1(x)=aF_1(x)F_2(x)\cdots F_r(x)$，$h_2(x)=d_1(x)/d_2(x)=F_2(x)F_3(x)\cdots F_r(x)$，$h_3(x)=d_2(x)/d_3(x)=F_3(x)F_4(x)\cdots F_r(x)$，$\cdots$，$h_r(x)=d_{r-1}(x)/d_r(x)=F_r(x)$，则有$F_1(x)=h_1(x)/ah_2(x)$，$F_2(x)=h_2(x)/h_3(x)$，$\cdots$，$F_{r-1}(x)=h_{r-1}(x)/h_r(x)$，$F_r(x)=h_r(x)$。

求$f(x)$的标准分解式：1)求$F_1(x)$，$F_2(x)$，$\cdots$，$F_r(x)$；2)分解$F_1(x)$，$F_2(x)$，$\cdots$，$F_r(x)$。

四　根的理论

1　多项式的值

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in \mathbf{F}[x]$，$c\in\mathbf{F}$，在$f(x)$的表示式中把$x$用$c$代替，从而，得到$\mathbf{F}$中的数$a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}$

$+\cdots+a_1c+a_0$，称为当$x=c$时$f(x)$的值，记为$f(c)$。

设$f(x)$，$g(x)$，$u(x)$，$v(x)\in \mathbf{F}[x]$，$c\in\mathbf{F}$，则

1）$f(x)=g(x)\Rightarrow f(c)=g(c)$；

2）$u(x)=f(x)\pm g(x)\Rightarrow u(c)=f(c)\pm g(c)$；

3）$v(x)=f(x)g(x)\Rightarrow v(c)=f(c)g(c)$。

余式定理．$f(x)\in\mathbf{F}[x]$，$c\in\mathbf{F}$．一次多项式$x-c$去除$f(x)$所得余式是常数，等于$f(c)$。

于是，可以用综合除法求$f(x)$当$x=c$时的值$f(c)$。

2　多项式的根

设$f(x)\in\mathbf{F}[x]$，$c\in\mathbf{F}$．若$f(c)=0$，则称c是$f(x)$在$\mathbf{F}$中的一个根．

因式定理．c是$f(x)\in\mathbf{F}[x]$在$\mathbf{F}$中的根$\Leftrightarrow(x-c)\mid f(x)$．

若$\mathbf{F}[x]$中的多项式$f(x)$在$\mathbf{F}$中有k个不同的根c_1，c_2，$\cdots$，c_k，则$f(x)=(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_k)\phi(x)$，$\phi(x)\in\mathbf{F}[x]$．

设$f(x)\in\mathbf{F}[x]$，$c\in\mathbf{F}$．若$x-c$是$f(x)$在$\mathbf{F}[x]$中的k重因式，则称c是$f(x)$的k重根．当$k=1$时称为单根，当$k>1$时称为重根，当$k=0$时c不是$f(x)$的根．

$f(x)\in\mathbf{F}[x]$在$\mathbf{F}$中有重根$\Rightarrow(f(x),f'(x))\neq1$．或者，等价地，$(f(x),f'(x))=1\Rightarrow f(x)\in\mathbf{F}[x]$在$\mathbf{F}$中无重根．

设$f(x)\in\mathbf{F}[x]$，$f(x)\neq0$，则$f_1(x)=f(x)/(f(x),f'(x))$在$\mathbf{F}$中无重根．并且，若不考虑根的重数，则$f(x)$与$f_1(x)$在$\mathbf{F}$中根相同．

$c\in\mathbf{F}$是$f(x)\in\mathbf{F}[x]$的k重根（$k\geqslant1$）$\Leftrightarrow f(c)=f'(c)=\cdots=f^{(k-1)}(c)=0$而$f^{(k)}(c)\neq0$．

$\mathbf{F}[x]$中的n次多项式$f(x)$在$\mathbf{F}$中的根的个数不超过n，重根按重数计算．

3　多项式函数

设$f(x)\in\mathbf{F}[x]$．作σ：对任意$c\in\mathbf{F}$，$\sigma(c)=f(c)$，则σ是

F到F的一个映射．称为由多项式$f(x)$所决定的定义在F上的多项式函数，并且，将多项式函数也记为$f(x)$．但是，必须强调，对于$f(x)$，一般仍指多项式，而在表示多项式函数时，一定附加“函数”二字．

设$f(x)$，$g(x)$是F〔x〕中的两个多项式，且次数均不超过n或为零多项式．若对于F中$n+1$个互不同的数c_1，c_2，…，c_{n+1}，均有$f(c_i)=g(c_i)$，$i=1, 2, \cdots, n+1$，则$f(x)=g(x)$．

在数域F上，不相等的多项式定义不相等的多项式函数．

设$f(x)$，$g(x)$是F〔x〕中的两个多项式．若多项式函数$f(x)$与多项式函数$g(x)$相等，即，对于任意$c\in$ F，均有$f(c)=g(c)$，则称多项式$f(x)$与$g(x)$恒等．

多项式恒等⇔多项式相等．

尽管多项式恒等与相等具有完全不同的含义，是两个完全不同的概念，但是，在数域F上，二者却是一致的．即，将多项式看作形式表达式与看作函数，在数域F上是等效的．然而，为了便于应用与推广，在代数学中，多项式看作形式表达式．

4　插值多项式

设$f(x)$是F〔x〕中次数$<n$的多项式，c_1，c_2，…，c_n是F中n个不同的数．若$f(c_i)=a_i$，$a_i\in$ F，$i=1, 2, \cdots, n$，则

$$\phi(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(x-c_1)\cdots(x-c_{i-1})(x-c_{i+1})\cdots(x-c_n)}{(c_i-c_1)\cdots(c_i-c_{i-1})(c_i-c_{i+1})\cdots(c_i-c_n)}$$
$$=f(x).$$

Ⅱ　特殊数域C，R，Q上的一元多项式

一　特殊性与一般性

复数域C、实数域R、有理数域Q被称之为特殊数域或常用数域，是相对于一般数域F而言的．

一般性寓于特殊性之中，因此，前面对于F〔x〕所作的讨论，都适用于C〔x〕，R〔x〕，Q〔x〕．鉴于C、R、Q自身的特殊性，

在C[x]、R[x]、Q[x]中将出现一些新的更深入的结果.

二　复数域C上的一元多项式

代数基本定理. 任意$n(n>0)$次复系数多项式在复数域中至少有一个根.

任意n次复系数多项式在复数域中恰有n个根，重根按重数计算.

C[x]中仅有一次多项式是不可约的，换言之，次数≥2的多项式均可约.

复系数多项式因式分解定理. C[x]中每一个次数>0的多项式$f(x)$都可以在C[x]中唯一地分解为一次因式的乘积，从而，$f(x)$有如下的标准分解式 $f(x)=a(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_s)^{l_s}$，其中$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_s$为$s$个互异复数，$l_1$，$l_2$，…，$l_s$为正整数，且$l_1+l_2+\cdots+l_s=deg(f(x))$.

韦达定理. 设$n(n>0)$次多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$的$n$个根是$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$，则有

$$a_{n-1}/a_n=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n),$$

$$a_{n-2}/a_n=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n,$$

………………………………………

$$a_0/a_n=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

三　实数域R上的一元多项式

若实系数多项式$f(x)$有非实的复根α，则α的共轭复数$\bar{\alpha}$也是$f(x)$的根，且α与$\bar{\alpha}$有相同的重数. 换言之，实系数多项式的虚根两两成对. 从而，奇次实系数多项式至少有一个实根.

设$f(x)$是n次实系数多项式，则，1）当$n\geq3$时，$f(x)$在R[x]中可约，2）当$n=2$时，$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$在R[x]中可约$\Leftrightarrow b^2-4ac\geq0$. 换言之，R[x]中的不可约多项式只有一次多项式及满足$b^2-4ac<0$的二次多项式ax^2+bx+c.

实系数多项式因式分解定理．每一个次数>0的实系数多项式$f(x)$，在$R[x]$中都唯一地分解为一次因式与二次不可约因式的乘积，从而，$f(x)$有如下的标准分解式

$$a(x-c_1)^{l_1}\cdots(x-c_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r},$$

其中c_1，…，c_s为互异实数，p_1，q_1；…；p_r，q_r为互异实数组，$p_i^2-4q_i<0$，$i=1$，…，r，而l_1，…，l_s，k_1，…，k均为正整数，且$l_1+\cdots+l_s+2(k_1+\cdots+k_r)=deg(f(x))$．

四　有理数域Q上的一元多项式

设有整系数多项式$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$．若$(b_n, b_{n-1}, \cdots, b_1, b_0)=1$，则称$g(x)$是一个本原多项式．

任一个非零的有理系数多项式$f(x)$都可以表示为一个有理数r与一个本原多项式$g(x)$的乘积，即$f(x)=rg(x)$，并且，在不计正负号的情况下表法唯一．

高斯引理．两个本原多项式的乘积是一个本原多项式．

若一个次数>0的整系数多项式能够分解为两个次数较低的有理系数多项式的乘积，则它一定能分解为两个次数较低的整系数多项式的乘积．

设$f(x)$，$g(x)$是整系数多项式，且$g(x)$是本原多项式．若$f(x)=g(x)h(x)$，$h(x)$为有理系数多项式，则$h(x)$必为整系数多项式．

于是，有理系数多项式$f(x)$在Q上可约⇔整系数多项式$kf(x)(k\in \mathbf{Z})$在Q上可约⇔整系数多项式$kf(x)$在Z上可约．

设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是一个整系数多项式，$\alpha=s/r$是它的一个有理根，$(r, s)=1$，则，1）$r|a_n$，$s|a_0$；2）$f(x)=(x-(s/r))q(x)$，其中$q(x)$是整系数多项式；3）$f(1)/(1-\alpha)$，$f(-1)/(1+\alpha)$是整数．

设$f(x)\in \mathbf{Q}[x]$，a，b，$c\in \mathbf{Q}$，而$\sqrt{c}$是无理数。若$\alpha=a+\sqrt{c}$是$f(x)$的根，则$\tilde{\alpha}=a-b\sqrt{c}$也是$f(x)$的根，且$\tilde{\alpha}$与$\alpha$有相同的重数。换言之，有理系数多项式的这种类型的无理根两两成对。

艾森斯坦因判别法。设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是一个整系数多项式。若有一个素数$p$，使得，1）$p\nmid a_n$，2）$p|a_{n-1}$，$a_{n-2}$，…，$a_1$，$a_0$，3）$p^2\nmid a_0$，则$f(x)$在$\mathbf{Q}$上不可约。

该判别法的条件仅是充分条件，所以，必须强调，不满足该判别法条件的多项式未必可约。

$\mathbf{Q}[x]$中存在任意次数的不可约多项式。

设$f(x)$是整系数多项式，令$x=ay+b$，a，b是整数，且$a\neq 0$，并令$g(y)=f(ay+b)$，则$g(y)$与$f(x)$在有理数域上的可约性相同。

克朗奈格定理．设$f(x)$是$n(n>0)$次有理系数多项式，则$f(x)$可以经有限次有理运算在$\mathbf{Q}$上分解为不可约多项式的乘积。

Ⅳ　一般数域F上的多元多项式

一　多元多项式的概念

1　定义

设$\mathbf{F}$是数域，x_1，x_2，…，x_n是n个文字，$a\in \mathbf{F}$，k_1，k_2，…，k_n是非负整数。形式表达式$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$称为数域$\mathbf{F}$上的一个$n$元单项式，简称为单项式。$a$称为单项式的系数，$k_i$称为$x_i$的次数。当$a\neq 0$时，$k_1+k_2+\cdots+k_n$称为单项式的次数。$k_i=0$的$x_i^{k_i}$可以略去不写，也可以添上一些$k_i=0$的$x_i^{k_i}$。当$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$时，$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$写为$a$。

若两个单项式的对应的x_i的次数相同，则称这两个单项式为同类项。即，$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$与$bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$是同类项

$\Leftrightarrow k_i=l_i$, $i=1, 2, \cdots, n$.

有限个单项式用加号连结而成的形式表达式

$$\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n},\ a_{k_1k_2\cdots k_n}\in \mathbf{F},$$

称为数域F上的一个n元多项式，常记为$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，有时简记为f. 其中的单项式称为多元多项式的项，各项的系数称为多元多项式的系数.约定：多元多项式中不含有同类项；系数1省略；系数为0的项可以省略不写，也可以添上一些系数为0的项. 系数全为零的多元多项式称为零多项式，记为0. 可写为$a\in \mathbf{F}$的项称为常数项. 当$f(x_1, x_2, \cdots x_n)\neq 0$时，次数最高的项的次数称为$f$的次数，记为$deg(f)$.

两个单项式相等$\Leftrightarrow$它们是同类项且系数相等. 两个多元多项式$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=g(x_1, x_2, \cdots, x_n)\Leftrightarrow f$与$g$有完全相同的项.

2　运算

F上的两个n元多项式的和是指把出现于$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$中对应同类项的系数相加（有时要添上一些系数为0的项）所得到的一个n元多项式，记为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

F上的两个单项式的积如下规定：

$$(ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n})(bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n})$$
$$=(ab)x_1^{k_1+l_1}x_2^{k_2+l_2}\cdots x_n^{k_n+l_n}.$$

F上的两个n元多项式$f(x_1, x_2, \cdots,x_n)$与$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的积是指f的每一项分别与g的每一项相乘，出现的同类项系数相加成为一项，而后把得到的所有乘积用加号连结起来，所得的多元多项式. 积记为$f(x_1, x_2, \cdots x_n)g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

规定：$-f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$即$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的各

项系数变号之后所得到的n元多项式；$f-g=f+(-g)$.

对于任意的多项式$f(x_1, x_2,\cdots,x_n)$，$g(x_1, x_2,\cdots,x_n)$，成立：1）$f+0=0+f=f$；2）$f0=0f=0$；3）$f1=1f=f$；4）$f-g=0\Leftrightarrow f=g$；5）$f-0=f$.

n元多项式的加法与乘法运算，满足下列规律：1）$f+g=g+f$；2）$(f+g)+h=f+(g+h)$；3）$fg=gf$；4）$(fg)h=f(gh)$；5）$f(g+h)=fg+fh$.

加法的次数定理．f，g是F上的两个n元多项式，$f\neq0$，$g\neq0$，$f+g\neq0$，则$deg(f+g)\leqslant max(deg(f), deg(g))$.

数域F上文字x_1，x_2，…，x_n的n元多项式的全体，连同它们的加法与乘法运算一起组成的系统，称为数域F上的n元多项式环，记为$F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$.

3　字典排列法

一元多项式按其项的次数给出一个自然的排列顺序，而多元多项式就不能如此．模仿字典的排列原则，得到字典排列法．

设有非负整数有序数组$\alpha=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$，$\beta=(l_1, l_2, \cdots, l_n)$．若有$i\leqslant n$，使得$k_1-l_1=k_2-l_2=\cdots=k_{i-1}-l_{i-1}=0$，而$k_i-l_i>0$，则称$\alpha$先于$\beta$，记为$\alpha>\beta$，例如，$(1, 3, 2)>(1, 2, 4)$．若$\beta$先于$\alpha$，则记为$\alpha<\beta$．若$k_1-l_1=\cdots=k_n-l_n=0$，则记$\alpha=\beta$．于是，三种关系：$\alpha>\beta$，$\alpha=\beta$，$\alpha<\beta$，有且仅有一个成立．而且，“>”具有传递性．

若让$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$与$\alpha=(k_1,k_2, \cdots,k_n)$对应，则可以按“>”关系来排列$n$元多项式的项．这就是字典排列法．$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的按字典排列法写出来的第一个系数不为零的项，称为$f$的首项．应该指出，首项不一定具有最大次数．

当$f(x_1, x_2\cdots, x_n)\neq0$，$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)\neq0$时，乘积$fg$的首项等于$f$的首项与$g$的首项的积．由此得出：1）$f_i\neq0$，$i=1, 2, \cdots, m\Rightarrow f_1f_2\cdots f_m$的首项等于每个$f_i$首项之积；

2）$f\neq0$，$g\neq0\Rightarrow fg\neq0$；3）$fg=fh$，$f\neq0\Rightarrow g=h$。

4　多项式函数

设有

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n)=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

而c_1，c_2，…，$c_n\in$ **F**，则**F**中的数

$$f(c_1, c_2,\cdots,c_n)=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n} c_1^{k_1}c_2^{k_2}\cdots c_n^{k_n}$$

称为当$x_1=c_1$，$x_2=c_2$，…，$x_n=c_n$时$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的**值**。从而，就由$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$定义了一个**F**上的n元函数，称为多项式函数，仍记为$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

对于任意c_1，c_2，…，$c_n\in$ **F**，成立：

1）若　$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，

则　$f(c_1, c_2, \cdots, c_n)=g(c_1, c_2, \cdots, c_n)$；

2）若$u(x_1, x_2,\cdots,x_n)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则$u(c_1, c_2, \cdots, c_n)=f(c_1, c_2,\cdots,c_n)+g(c_1,c_2,\cdots, c_n)$；

3）若$v(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1, x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2, \cdots, x_n)$，则$v(c_1, c_2, \cdots, c_n)=f(c_1, c_2, \cdots,c_n)g(c_1, c_2, \cdots, c_n)$。

设$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是数域**F**上的n元多项式．若对于任意c_1，$c_2,\cdots,c_n\in$ **F**，都有$f(c_1, c_2, \cdots, c_n)=0$，则$f$是零多项式，即$f(x_1,x_2,\cdots, x_n)=0$。

设$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是数域**F**上的两个n元多项式．若对于任意c_1，$c_2,\cdots,c_n\in$ **F**，都有

$$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)=g(c_1, c_2, \cdots, c_n),$$

则　$f(x_1, x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2, \cdots, x_n)$。

二　齐次多项式

若多项式$f(x_1, x_2,\cdots,x_n)$中的每个单项式全是m次的，则称$f(x_1, x_2,\cdots,x_n)$是一个m次齐次多项式．例如，$f(x_1,x_2,$

$x_3) = 2x_1x_2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 3x_3^4$是一个 4 次齐次多项式。

任何一个m次多项式$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$都可以唯一地表示为$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=0}^{m} f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的形式，其中$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是$i$次齐次多项式，称为$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的$i$次齐次成份。

两个齐次多项式的乘积仍然是齐次多项式，积的次数就等于这两个多项式的次数之和。

设有m次多项式$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=0}^{m} f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与l次多项式$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=0}^{l} g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是齐次成分之和，则乘积$h = fg$的k次齐次成份$h_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= \sum_{i+j=k} f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

特别地，$h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的最高次齐次成份是

$$f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) g_l(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

乘积次数定理. 若$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$，$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$，则$deg(fg) = deg(f) + deg(g)$.

三　对称多项式

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是数域**F**上的n元多项式. 若对于任意的i，j，$1 \leqslant i < j \leqslant n$，都有

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots x_n),$$

则称f是对称多项式. 例如，$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - x_1 - x_2 - x_3$是对称多项式.

对称多项式的多项式是对称多项式. 即，若 f_1，f_2，$\cdots$，f_m都是n元对称多项式. 而$g(y_1, y_2, \cdots, y_m)$是任一个m元多项式，则 $g(f_1, f_2, \cdots, f_m) = h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是n元对称

多项式。

下面n个n元对称多项式

$$\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$
$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\sigma_n=x_1x_2\cdots x_n,$$

称为初等对称多项式（或基本对称多项式），其中σ_k表示$x_1,x_2,\cdots,x_n$中每次取k个所做的一切可能的乘积之和。

引理．设有数域F上的一个n元多项式．

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n}a_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}.$$

以σ_i代替$x_i(i=1,2,\cdots,n)$，得到$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$的一个多项式

$$f(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n}a_{k_1k_2\cdots k_n}\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\cdots\sigma_n^{k_n}.$$

若$f(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)=0$，则一切系数$a_{k_1k_2\cdots k_n}=0$，即$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$。

对称多项式基本定理．数域F上的每一个n元对称多项式都可以表示成初等对称多项式$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$的系数在F中的多项式，并且，这种表示法是唯一的。

把对称多项式表示为初等对称多项式的多项式，称为对称多项式初等化。这一工作可以按一定的程序来实现。

四　根的判别式

定义$D(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2$.

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$的$n$个复根（重根按数计算），则$f(x)$有重根$\Leftrightarrow D(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=0$。$D(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$称为$f(x)$的根的判别式。

对于$f(x)=x^2+a_1x+a_2$，$D=a_1^2-4a_2$.

对于$f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$，$D=a_1^2a_2^2-4a_2^3-4a_1^3a_3-27a_3^2+18a_1a_2a_3$.

设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是数域F上的多项式，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$f(x)$的$n$个复根（重根按重数计算），则$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$的每一个系数取自F的对称多项式都是$f(x)$的系数的多项式（该多项式的系数取自F），从而是F中的一个数.

§3 重点难点

本章的主题词是：数环，数域，有理数域；一元多项式，多项式的次数，零多项式，零次多项式，首1多项式，一元多项式环；带余除法，综合除法，整除，因式，倍式，平凡因式；最大公因式，辗转相除法，互素，两两互素；不可约多项式，唯一因式分解定理，标准分解式（典型分解式），导数（微商），k重因式，重因式，单因式；多项式的值，余式定理，多项式的根，重根，多项式函数，多项式恒等；代数基本定理，韦达定理，复根，实根；本原多项式，高斯引理，素数（质数），艾森斯坦因判别法，有理根，克朗奈格定理；单项式，多元多项式，字典排列法，齐次多项式，对称多项式，初等对称多项式（基本对称多项式），对称多项式初等化，根的判别式.

本章的基本方法是：带余除法，综合除法，整除判别法，辗转相除法，最大公因式组合表示法，互素判别法，重因式判别法，分离重因式法，因式分解方法，艾森斯坦因判别法，有理根求法，克朗奈格方法，多元多项式字典排列法，对称多项式初等化方法，待定系数法.

本章的重点是：多项式的概念，整除理论与因式分解理论，对称多项式.

本章的研究对象主要是一元多项式. 只有首先明确一元多项

式的实质是什么，才能为掌握全章内容打好基础.多项式被定义为形式表达式，是本章的第一个重点概念.要特别强调形式表达式，通过加法与乘法运算进一步加深理解，并贯彻到所有内容中去。

带余除法定理 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$是讨论问题的基础。因为，有时余式$r(x)\neq 0$，所以，多项式的除法不是总可以做的，从而，整除就成了两个多项式之间的一种特殊且重要的关系。因此，整除就成为一个重点概念。最大公因式，互素是在整除的基础上建立起来的概念，在整个多项式的理论中占重要地位，是必须深入理解的基本概念，特别是互素，在代数学的其它部分常常用到，因此，成为两个重点概念。整除、最大公因式、互素构成整除理论。

因式分解是本章的中心。唯一因式分解定理是一个十分完美的结果，在代数学中很重要，以后还会有类似的结果。唯一因式分解定理是说：次数＞0的多项式可以唯一地分解为不可约多项式的乘积，而不可约多项式是在整除意义上最简单的多项式，因此，定理的实质是把复杂的多项式转化为简单的多项式。整除理论和不可约多项式的概念是研究唯一因式分解定理的基础；而重因式概念、特殊数域上的因式分解又是唯一因式分解定理的具体化；由唯一因式分解定理建立了多项式的标准分解式，以标准分解式为工具，又可以从理论上进一步研究整除与最大公因式。因此，唯一因式分解定理确实是中心。此外，因式分解理论还彻底解决了中学数学里因式分解中的若干遗留问题。

对称多项式是多元多项式理论的重点。对称多项式自身形成一套完整的理论与方法，而且有着广泛的应用，例如，一元多项式根的判别式，因此，成为本章的一个重点。

本章的难点是：形式表达式的概念，不可约多项式的概念及唯一因式分解定理的证明，本原多项式的概念及高斯引理的证明。

形式表达式的概念，既是本章的一个重点，又是本章的一个难点。多项式被定义为形式表达式，这与中学数学里的定义相距较远，从而，初学者不易理解。当然，也正是这一点，体现了代数学的特色，成为代数学与其它数学学科的一个区别.多项式的运算是形式地定义的。多项式的导数及求导法则都是形式地进行讨论，并不依赖于数学分析中的同类概念。多项式的形式表达式定义以及由此引起的各种问题，很可能长时间地使初学者感到困惑。因此，成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1）说明形式表达式定义的优越性，文字x不仅可以代表数，而且可以是其它的事物，如以后某些章中将要谈到的矩阵、线性变换等，x的意义十分广泛；2）确信这是代数学的一个特色，便于以后作各种推广，要学好代数学，就必须尽快理解形式表达式的意义；3）在讨论加法与乘法的定义、导数的定义时，反过来突出形式表达式；4）与中学数学的结果加以对照，认识二者的一致性，例如，乘法的（形式的）定义，就是中学里多项式乘法中边乘边合并同类项；5）在讨论多项式函数之后，进行总结，进一步深入且全面地理解形式表达式的意义。

不可约多项式是多项式理论发展中的一个重要概念，是在整除理论的基础上建立的较高级的概念，从而是较难理解的一个概念。因式分解定理的证明不是构造性的，其证明方法是数学归纳法，而且，证明存在性用第二数学归纳法，证明唯一性用第一数学归纳法，证明篇幅也较长，从而，具有一定的难度。因此，成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1）将不可约多项式与素数作类比，本质是“不能再分解”；2）分析不可约多项式与互素的联系与区别；3）作几个不可约多项式的实际例子，而且，在讨论R〔x〕、C〔x〕中的不可约多项式之后，回过来再认识不可约多项式的本质；4）证明因式分解式的存在性时，可先从直观入手，将一个较高次的多项式分解为两个较低次的多项式之

积，继续这一步骤，得到分解式，从而，形成一个直观的证明，而后，再上升到用数学归纳法去证明；5）证明因式分解式的唯一性时，要先熟悉关于整除与不可约多项式等的有关性质，作好准备，而后，在证明过程中，注意非零常数因式的选取，并注意下脚的标号。

本原多项式的引入有一定的困难；高斯引理的证明使用反证法，还使用了找一个固定系数的技巧，也有一定的困难。因此，成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1）从实际例子入手认识本原多项式；2）通过化有理系数多项式为一有理数与一本原多项式的乘积，进一步熟悉本原多项式的意义；3)在证明高斯引理时，关键在于，搞清楚由找一个固定系数而引出矛盾的思想方法；4）通过一个实例熟悉高斯引理及其证明过程。

§4 习题类解

I 计算题

一、带余除法

关于带余除法的习题，有如下几类：1）给定$f(x)$,$g(x)$，求$g(x)$除$f(x)$所得的商式$q(x)$与余式$r(x)$；2）判定是否有$g(x)\mid f(x)$；3）所给的多项式$f(x)$，$g(x)$中有未知的系数，并给定一定的条件（如整除，余式为某种多项式，等），确定未知系数。

解题时要紧扣带余除法公式 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$。一般采用两种方法：1）长除法，即中学数学里多项式的除法，直接相除，得到商式与余式，再按题目的条件作出解答；2）待定系数法，即根据题目的条件设出商式与余式，将问题转化为

乘法，再由$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，计算之后比较两边的系数，作出解答。

例1 设 $f(x)=x^3-2x^2+ax+b$，$g(x)=x^2-x-2$，试求$g(x)$除$f(x)$所得的商式与余式。当余式$r(x)=2x+1$时，求系数a，b。

解1 1）直接作除法，竖式省略，得到商式$q(x)=x-1$，余式$r(x)=(a+1)x+(b-2)$。

2）已知$r(x)=2x+1$。由于带余除法所得的商式与余式是唯一的，所以有$(a+1)x+(b-2)=2x+1$，由多项式相等的定义得$a+1=2$，$b-2=1$，即$a=1$，$b=3$。

解2 1）因为，带余除法所得的商式与余式是唯一的，所以，必有$x^3-2x^2+ax+b=(x^2-x-2)(cx+d)+(mx+n)$，其中$q(x)=cx+d$为商式，$r(x)=mx+n$为余式，$c,d,m,n$为待定的系数。进行计算，由多项式相等的定义，比较系数，得$c=1$，$d-c=-2$，$-2c-d+m=a$，$n-2d=b$，从而有$c=1$，$d=-1$，$m=a+1$，$n=b-2$。因此，$q(x)=x-1$，$r(x)=(a+1)x+(b-2)$。2）同解1，省略。

二 综合除法

关于综合除法的习题，有如下几类：1）求多项式$f(x)$当$x=c$时的值$f(c)$；2）判断$x-c$是否整除$f(x)$；3）判断c是否为$f(x)$的根；4）由$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，求$b_0,b_1,\cdots,b_{n-1},b_n$，使得$f(x)=b_n(x-c)^n+b_{n-1}(x-c)^{n-1}+\cdots+b_1(x-c)+b_0$；5）解4）的反问题。

解题的一般方法是：用综合除法求得$x-c$除$f(x)$所得余式r，$r=f(c)$。从而，对于1）—3），即直接得到解答；对于4)—5)，连续作综合除法，根据§2，Ⅱ，二，所述方法得到解答。

例2 把$f(x)=x^4-2x^2+3$表成$x+2$的多项式。

解 作

1	0	-2	0	3	-2
1	-2	2	-4	$11=r_1$	
1	-4	10	$-24=r_2$		
1	-6	$22=r_3$			
$q_4=1$	$-8=r_4$				

所以 $f(x)=(x+2)^4-8(x+2)^3+22(x+2)^2-24(x+2)+11.$

三　最大公因式

关于最大公因式的习题，有如下几类：1）求 $f(x)$，$g(x)$ 的一个最大公因式；2）求$u(x)$,$v(x)$，使$f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x),g(x))$；3）判断$f(x)$,$g(x)$是否互素；4）求$f(x)$，$g(x)$的公根，即求多项式$(f(x),\ g(x))$的根；5)所给的$f(x)$，$g(x)$中有未知的系数，并给定一些条件（如$f(x)$，$g(x)$ 的最大公因式为某种多项式），确定未知系数。

解题的一般方法是：用辗转相除法求得$f(x)$，$g(x)$ 的最大公因式，从而得出解答。除2)之外，在运算过程中，可以乘以数域F中的一个适当的非零的数，使系数变得易于计算。

例 3　设$f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$，$g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$，试求$(f(x),\ g(x))$，并求$u(x)$,$v(x)$，使得 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x),\ g(x))$。

解　作辗转相除法，得到

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}\right)g(x)+\left(-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}\right),$$

$$g(x)=\left(-\frac{27}{5}x+9\right)\left(-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}\right)+(9x+27),$$

$$-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}=\left(-\frac{5}{81}x-\frac{10}{81}\right)(9x+27).$$

所以　　$(f(x),\ g(x))=x+3$。

因为 $9x+27=g(x)-\left(-\frac{27}{5}x+9\right)\left(-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}\right)$

$$=g(x)-\left(-\frac{27}{5}x+9\right)\left[f(x)-\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}\right)g(x)\right]$$

$$=\left(\frac{27}{5}x-9\right)f(x)+\left[1-\left(\frac{27}{5}x-9\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}\right)\right]g(x)$$

$$=\left(\frac{27}{5}x-9\right)f(x)+\left(-\frac{9}{5}x^2+\frac{18}{5}x\right)g(x),$$

所以 $x+3=f(x)\left(\frac{3}{5}x-1\right)+g(x)\left(-\frac{1}{5}x^2+\frac{2}{5}x\right)$.

因此，$u(x)=\frac{3}{5}x-1$，$v(x)=-\frac{1}{5}x^2+\frac{2}{5}$ 使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x),\ g(x)).$$

例 4 设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+4x+2u$，$g(x)=x^3+tx^2+2u$的最大公因式是一个二次多项式，求t，u的值。

解 对$f(x)$，$g(x)$利用辗转相除法，得

$$f(x)=g(x)+x^2+4x,$$
$$g(x)=(x+t-4)(x^2+4x)-4(t-4)x+2u,$$

因为，$f(x)$，$g(x)$的最大公因式是二次的，所以，$-4(t-4)x+2u=0$，由多项式相等的定义得，$-4(t-4)=0, 2u=0$,因此，$t=4$，$u=0$。

四 重因式、重根

关于重因式、重根的习题，大致分为三类：1)判断给定的多项式$f(x)$是否有重因式、是否有重根，通过计算$(f(x),\ f'(x))$来解决，当$(f(x),\ f'(x))=1$时无重因式、无重根；当$(f(x),\ f'(x))\neq 1$时有重因式；2）求给定多项式$f(x)$的重因式、重根，并确定重数，要从$d(x)=(f(x),\ f'(x))$出发来解决，将$d(x)$分解因式、求根；3）所给多项式里有未知的系数，由重因式、重根条件，求出未知系数。

例 5 试判断多项式 $f(x)=2x^3+5x^2+4x+1$ 是否有重因

式，如果有，试求出重因式并确定重数。

解 $f'(x)=6x^2+10x-4$。作辗转相除法，求得 $(f(x), f'(x))=x+1$，因此，$f(x)$有重因式。

根据重因式定理，$x+1$是$f(x)$的二重因式。

例6 试确定A，B，使得$x-1$是多项式 $f(x)=Ax^{n+1}+Bx^n+1$（$n>1$）的二重因式。

解 $f'(x)=(n+1)Ax^n+nBx^{n-1}$。若$x-1$是$f(x)$的二重因式，则$f(1)=f'(1)=0$。从而，$A+B+1=0$，$(n+1)A+nB=0$.解得$A=n$，$B=-n-1$.所以$f(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$。

又，$f''(x)=(n+1)n^2x^{n-1}-n(n^2-1)x^{n+2}$，而 $f''(1)=(n+1)n^2-n(n^2-1)=n^2+n\neq0$，所以，$x-1$确是$f(x)$的二重因式。

例7 试确定t的值，使$f(x)=x^3-2x^2+x+t$ 有重根，进而确定重根及重数。

解 $f'(x)=3x^2-4x+1$。若$f(x)$有重根a，则$f'(a)=0$，即$3a^2-4a+1=0$，解得$a=1/3$或$a=1$。

当$a=1/3$时，由$f(1/3)=0$求得$t=-4/27$。此时，$f(1)\neq0$ $f''(x)=6x-4$，$f''(1/3)\neq0$，从而，$1/3$是$f(x)$的二重根.

当$a=1$时，由$f(1)=0$求得$t=0$。此时，$f(1/3)\neq0$，$f''(1)\neq0$，从而，1是$f(x)$的二重根。

因此，当$t=-4/27$时，$f(x)$有二重根$x=1/3$；当$t=0$时，$f(x)$有二重根$x=1$。

五　艾森斯坦因判别法

用艾森斯坦因判别法判定整系数多项式不可约，一般有两种情况：1）直接使用；2）作一变量替换 $x=ay+b$，一般，$a=1$ $b=\pm1$等之后，再使用。

例8 设p是素数，试判定多项式 $f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots$

$+x+1$ 在有理数域上是否可约。

解 由于 $(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1)=x^p-1$，所以 $x-1\,|\,x^p-1$，且 $f(x)=\dfrac{x^p-1}{x-1}$.

设 $x=y+1$，$g(y)=f(y+1)=\dfrac{(y+1)^p-1}{(y+1)-1}$

$$=\frac{y^p+c_p{}^1y^{p-1}+\cdots+c_p{}^{p-1}y}{y}=y^{p-1}+c_p^1y^{p-2}+\cdots+c_p^{p-1}.$$

$g(y)$首项系数为1，其它各项系数为c_p^1，…，c_p^{p-1}．其中 $c_p{}^i=\dfrac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i!}$，$i=1$，2，…，$p-1$．此时，由于$p$是素数，$i<p$，所以$(i!，p)=1$，因此$i!$整除$(p-1)\cdots(p-i+1)$，从而，$p$整除$c_p{}^i$，$i=1$，2，…，$p-1$．但常数项 $c_p{}^{p-1}=p$，所以$p^2\nmid c_p{}^{p-1}$．根据艾森斯坦因判别法，$g(y)$ 在有理数域上是不可约的。

我们证明，$f(x)$ 在有理数域上不可约，用反证法．实际上，若$f(x)$在有理数域上可约，则$f(x)=u(x)v(x)$，其中有理系数多项式$u(x)$与$v(x)$的次数都小于$f(x)$的次数，则
$g(y)=u(y+1)v(y+1)$，即$g(y)$可以分解为两个次数都比它低的有理系数多项式的积，所以$g(y)$在有理数域上可约，引出矛盾。因此，$f(x)$在有理数域上不可约．

说明 当不能直接应用艾森斯坦因判别法时，作变量替换，使系数变化，就有可能应用判别法。因为是研究可约性，所以次数不能改变，因此，变量替换$x=y+1$，$y-1$就是首先要考虑的了。

六 求有理系数多项式的有理根

求有理系数多项式的有理根可以转化为求整系数多项式的有理根。根据关于整系数多项式的有理根的定理，先写出所有可能的有理根，而后用综合除法验证，就可以求得全部有理根．应该

注意两点：1）每求出一个有理根，就将原多项式降低一次，再对得到的商式验根即可；2）当 $f(1)\neq0$，$f(-1)\neq0$ 时，可用 $f(1)/(1-\alpha)$，$f(-1)/(1+\alpha)$不是整数来排除一些可能的根α，以减少验根次数。

例 9 求$f(x)=x^5+\frac{7}{2}x^4+\frac{3}{2}x^3-\frac{11}{2}x^2-8x-6$ 的全部有理根。

解 $g(x)=2f(x)=2x^5+7x^4+3x^3-11x^2-16x-12$。$g(x)$的所有可能的有理根是 ±1，±2，±3，±4，±6，±12，$\pm1/2$，$\pm3/2$。$g(1)=-27$，$g(-1)=-5$，由$(1+2)\nmid g(-1)$，得出2不是根，同理得出±3，-4，±6，±12，$1/2$，$3/2$都不是根。从而只要验证-2，4，$-1/2$，$-3/2$。

$$\begin{array}{rrrrrr|r|l}
2 & +7 & +3 & -11 & -16 & -12 & & -2\\
 & -4 & -6 & +6 & +10 & +12 & & \\
\hline
2 & +3 & -3 & -5 & -6 & & +0 & \\
 & -4 & +2 & +2 & +6 & & & \\
\hline
2 & -1 & -1 & -3 & +0 & & &
\end{array}$$

所以 $g(x)=(x+2)^2h(x)$，$h(x)=2x^3-x^2-x-3$。由$h(4)\neq0$，$h(-1/2)\neq0$ 知 4，$-1/2$不是根。但是

$$\begin{array}{rrrr|l}
2 & -1 & -1 & -3 & \frac{3}{2}\\
 & 3 & +3 & +3 & \\
\hline
2 & +2 & +2 & +0 &
\end{array}$$

所以$h(x)=(x-(3/2))(2x^2+2x+2)$。易知$2(x^2+x+1)$没有有理根。因此，$f(x)$的全部有理根是$-2$，$-2$，$3/2$。

说明 求出 $f(x)$ 的全部有理根后，有时可以进一步求得全部根。在本例中，x^2+x+1 的复根是$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，从而求得$f(x)$的全部根 -2，-2，$\frac{3}{2}$，$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$。

七 求标准分解式

求标准分解式的问题，就是因式分解的问题。这在理论上已经解决，但实践上并未实现，因式分解的（实用）一般方法尚未解决，但是，我们可以通过降低次数的方法，将多项式的分解归结为较低次多项式的分解。降次的途径是：1)分离重因式，2）求有理根。对于具体的系数域而言，还可以考虑用一些具体的性质。

例10 求多项式$f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$的标准分解式。

解 由 $f'(x)=5x^4-30x^2-40x-15$，$(f(x), f'(x))=x^3+3x^2+3x+1$ 得，$g(x)=f(x)/(f(x), f'(x))=x^2-3x-4$，所以$f(x)$的不可约因式为$x-4$，$x+1$。但是，$(f(x), f'(x))=(x+1)^3$，所以，由重因式定理，$x+1$是$f(x)$的4重因式，因此，$f(x)$的标准分解式为$f(x)=(x-4)(x+1)^4$。

例11 设$f(x)=x^6-7x^5+13x^4-4x^3+7x^2-13x+3$，试求$f(x)$在Q、R、C上的标准分解式。

解 求得$f(x)$的有理根为1，3，并且得到$f(x)=(x-1)(x-3)\cdot(x^4-3x^3-2x^2-3x+1)$，设$g(x)=x^4-3x^3-2x^2-3x+1$，则用中学数学里的分组分解法或前面已经用到过的待定系数法，得到$g(x)$的分解式$g(x)=(x^2+x+1)(x^2-4x+1)$。

因此，得到$f(x)$在Q、R、C上的标准分解式分别为

$f(x)=(x-1)(x-3)(x^2-4x+1)(x^2+x+1)$,

$f(x)=(x-1)(x-3)(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})(x^2+x+1)$,

$$f(x)=(x-1)(x-3)(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$$
$$[x+(1-\sqrt{3}i)/2][x+(1+\sqrt{3}i)/2]$$

例12 试求x^4+1在下列数域上的标准分解式：1）$F_1=C$，2）$F_2=\{a+bi| a, b\in Q\}$，3）$F_3=\{a+b\sqrt{2}| a, b\in Q\}$，4)$F_4=\{a+b\sqrt{2}i| a, b\in Q\}$，5）$F_5=R$。

解 1）$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2$
$=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)=\left[\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2\right]$
$\left[\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2\right]=\left[x+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]\left[x+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right.\right.$
$\left.\left.-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]\left[x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]\left[x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]$.

2）$x^4+1=x^4-i^2=(x^2+i)(x^2-i)$. 下面证明 x^2+i 在$\mathbf{F}_2$上不可约. 若不然，设$x^2+i=(x+\alpha)(x+\beta)$，$\alpha,\beta\in\mathbf{F}_2$，则$\alpha+\beta=0$，$\alpha\beta=i$，从而$-\alpha^2=i$. 再设$\alpha=a+bi$，$a$，$b\in\mathbf{Q}$，则$-\alpha^2=-a^2-2abi+b^2=i$，从而，$a^2=b^2$，$-2ab=1$. 当$a=-b$时，$2b^2=1$，$b=\sqrt{1/2}$，引出矛盾；当$a=b$时，$-2b^2=1$，引出矛盾. 同样可以证明$x^2-i$不可约，从略.

3）$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$. 关于因式不可约的证明，从略.

4）$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}ix-1)(x^2-\sqrt{2}ix-1)$. 关于因式不可约的证明，从略.

5）$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$. 由$(\sqrt{2})^2-4\times1=-2<0$，$(-\sqrt{2})^2-4\times1=-2<0$知，因式在$\mathbf{R}$上不可约.

说明 1）此例充分说明，因式分解随数域的改变而改变；2）必须证明分解得到的因式是不可约的.

八 对称多项式初等化

对称多项式初等化的一般步骤是：1）写出首项的指数组$(l_1,l_2,\cdots,l_n)$. 2)作$\phi_1=a\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\cdots\sigma_{n-1}^{l_{n-1}-l_n}\sigma_n^{l_n}$.
3）若$f_1=f-\phi_1$已初等化，则工作结束；若还未初等化，则对f_1重复上述过程，直到$f_k=f_{k-1}-\phi_k=\phi_{k+1}$初等化时，工作结束，4）写出$f=\phi_1+\phi_2+\cdots+\phi_k+\phi_{k+1}$，即为所求.

例13 把三元对称多项式$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3-x_1-x_2-x_3$初等化。

解 因首项为x_1^3，其指数组是（3，0，0），得 $\phi_1=\sigma_1^{3-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0=\sigma_1^3$，所以$f_1=f-\phi_1=(x_1^3+x_2^3+x_3^3-x_1-x_2-x_3)-(x_1+x_2+x_3)^3=-3(x_1^2x_2+x_1^2x_3+\cdots)-6x_1x_2x_3-x_1-x_2-x_3$。$f_1$的首项为$-3x_1^2x_2$，其指数组是(2，1，0)，得 $\phi_2=-3\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=-3\sigma_1\sigma_2=-3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=-3(x_1^2x_2+x_1^2x_3+\cdots)-9x_1x_2x_3$，所以 $f_2=f_1-\phi_2=3x_1x_2x_3-x_1-x_2-x_3=3\sigma_3-\sigma_1=\phi_3$。因此，$f=\phi_1+\phi_2+\phi_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3-\sigma_1$。

对于齐次对称多项式f，可以采用较简单的方法——待定系数法，进行初等化。其步骤是：1）写出满足$l_1\geqslant l_2\geqslant\cdots\geqslant l_n$ 且$l_1+l_2+\cdots+l_n=deg(f)$的所有的有序数组（$l_1$，$l_2$，…，$l_n$）。2）写出指数组($l_1$，$l_2$，…，$l_n$)对应的$\sigma_i$的方幂乘积 $\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\cdots\sigma_{n-1}^{l_{n-1}-l_n}\sigma_n^{l_n}$。3）以 2）中所得的一切项为项把$f$写为系数待定的式子。4）给$x_1$，$x_2$，…，$x_n$以适当的值，确定待定的系数。

例14 把n元对称多项式$f=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_i^2x_j^2$初等化。

解 指数组及对应的σ_i方幂的乘积列如下：

(2,2,0,0,…)，$\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^{0-0}\cdots\sigma_n^0=\sigma_2^2$，

(2,1,1,0,…)，$\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0}\sigma_4^{0-0}\cdots\sigma_n^0=\sigma_1\sigma_3$，

(1,1,1,1,…)，$\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^{1-0}\sigma_5^{0-0}\cdots\sigma_n^0=\sigma_4$，

从而，f可写为$f=\sigma_2^2+a\sigma_1\sigma_3+b\sigma_4$。取 $x_1=x_2=x_3=1$，$x_4=\cdots=x_n=0$，得$f=3$，$\sigma_1=\sigma_2=3$，$\sigma_3=1$，$\sigma_4=0$，从而 $3=3^2+a\cdot3\cdot1+b\cdot0$，$a=-2$。再取 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$，$x_5=\cdots=x_n=0$，得$f=6$，$\sigma_1=4$，$\sigma_2=6$，$\sigma_3=4$，$\sigma_4=1$，从而 $6=6^2+(-2)\cdot4\cdot4+b\cdot1$，$b=2$，因此，$f=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$。

例15 把3元对称多项式 $f=(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)$初等化。

解 因为，f的首项是$x_1^4x_2^2$，所以，指数组及对应的σ_i方幂的乘积如下：

$(4,2,0)$，$\sigma_1^{4-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^0=\sigma_1^2\sigma_2^2$，

$(4,1,1)$，$\sigma_1^{4-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1=\sigma_1^3\sigma_3$，

$(3,3,0)$，$\sigma_1^{3-3}\sigma_2^{3-0}\sigma_3^0=\sigma_2^3$，

$(3,2,1)$，$\sigma_1^{3-2}\sigma_2^{2-1}\sigma_3^1=\sigma_1\sigma_2\sigma_3$，

$(2,2,2)$，$\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-2}\sigma_3^2=\sigma_3^2$，

从而，f可写为$f=\sigma_1^2\sigma_2^2+a\sigma_1^3\sigma_3+b\sigma_2^3+c\sigma_1\sigma_2\sigma_3+d\sigma_3^2$。取$x_1$，$x_2$，$x_3$等于一些特殊值，得下表

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	1	0	2	1	0	2
2	−1	−1	0	−3	2	50
1	−2	−2	−3	0	4	200
1	−1	−1	−1	−1	1	8

从而，得到 $4+b=2$，$-27b+4d=50$，$-108a+16d=200$，$-a-b+c+d=7$，由此解得$a=-2$，$b=-2$，$c=4$，$d=-1$，因此$f=\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_1^3\sigma_3-2\sigma_2^3+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-\sigma_3^2$。

例16 把3元对称多项式 $f=(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3$初等化。

解1 f是齐次对称多项式，首项为 x^3。仿例14可解，从略。

解2 因为$\sigma_1=x+y+z$，所以$f=\sigma_1^3-(\sigma_1-2x)^3-(\sigma_1-2y)^3-(\sigma_1-2z)^3=\sigma_1^3-[3\sigma_1^3-6\sigma_1^2(x+y+z)+12\sigma_1(x^2+y^2+z^2)-8(x^3+y^3+z^3)]$。

因为，$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=\sigma_1^2$

$-2\sigma_2$；又可求得（参考例13）$x^3+y^3+z^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$，所以，$f=\sigma_1^3-[3\sigma_1^3-6\sigma_1^3+12\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-8(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)]=24\sigma_3$。

解 3 当 $x=0$ 时，$f=(y+z)^3-(y+z)^3-(z-y)^3-(y-z)^3=0$，从而，$f$ 含因式 x。因为 f 是 x，y，z 的对称多项式，所以 f 必含有因式 y 与 z，从而可设 $f=xyz\cdot q(x, y, z)(*)$。但 f 是 3 次齐次多项式，所以 $q(x, y, z)$ 必是非零常数，取 $x=y=z=1$ 代入（*）式，得 $q=24$，因此 $f=24\sigma_3$。

说明 1）解 2 说明，可以采用灵活的步骤初等化，特别是在一些结果已知或容易求得时，较为方便。2）有时，解 3 最简便，但必须有理论上的保证，这就是下面的定理：$x_n-g(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 整除 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的必要充分条件是：

$$f(x_1,\cdots,x_{n-1}, g(x_1, \cdots, x_{n-1}))=0.$$

Ⅱ 证明题

一 多项式相等

证明多项式相等的基本出发点及一般方法是：比较对应项的系数，证明系数相等．在证明过程中注意多项式的其它性质，如次数，根的个数，等等。证明多项式是零多项式时，往往采用反证法，利用根的个数定理引出矛盾。

例 1 设 $f(x)\in \mathbf{F}[x]$．若对于任意的 a，$b\in \mathbf{F}$，都有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，则 $f(x)=kx$，$k\in \mathbf{F}$。试证之。

证明 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，则只需证明 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_2=a_0=0$。

取 $a=b=0$，由条件得 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$，从而 $f(0)=0$。但 $f(0)=a_0$，所以 $a_0=0$。

由条件可推得，对于任意正整数 r，成立

$$f(r)=f(1+1+\cdots+1)=f(1)+f(1)+\cdots+f(1)=rf(1).$$

即 $$a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+\cdots+a_2r^2+a_1r$$

$=r(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1)$,

从而 $a_n r^{n-1}+a_{n-1}r^{n-2}+\cdots+a_2 r+[a_1-(a_n+\cdots+a_1)]=0$。因为$r$可取1，2，…，$m$，…无穷多个数，所以由根的个数定理得$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_2=0$。

说明 1）本例从比较系数出发，利用根的个数定理；2）类似的方法可证明：设$f(x)\in F[x]$。若有 $c\in F$，$c\neq0$，满足$f(x+c)=f(x)$，则$f(x)=k$，$k\in F$。

例2 证明：设 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)\in R[x]$．若$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$，则$f(x)=g(x)=h(x)=0$。

分析 因为，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$都是实系数多项式，所以，当$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)\neq0$时，右端的首项必为奇次的，将导致矛盾．于是，很容易想到，从次数出发讨论问题．

证明 要证$f(x)=g(x)=h(x)=0$，只要证明$g(x)=h(x)=0$。采用反证法．若不然，则$g(x)$，$h(x)$中至少有一个不为零，不妨设$g(x)\neq0$。

当$h(x)=0$时，$deg(xg^2(x))=deg(x)+2deg(g(x))$，从而$f(x)\neq0$。但$deg(f^2(x))=2deg(f(x))$，引出矛盾。

当$h(x)\neq0$时，$xg^2(x)$与$xh^2(x)$都是首项系数为正实数的奇次多项式，所以，不论它们次数是否相等，$xg^2(x)+xh^2(x)$都是奇次多项式．但是，此时$f(x)\neq0$，且$f^2(x)$是偶次多项式，引出矛盾．

因此，该命题得证．

说明 1）在复数域C中，此命题不成立，例如，$f(x)=0$，$g(x)=ix$，$h(x)=x$；2）在一般数域F中，下列命题成立：若$f(x)$，$g(x)\in F[x]$，且$f^2(x)=xg^2(x)$，则$f(x)=g(x)=0$；3）此命题可推广为：若$f(x)$，$g(x)$，$h(x)\in R[x]$，且$f^{2k}(x)=x^{2l+1}g^{2m}(x)+x^{2n+1}h^{2s}(x)$，其中 k，l，m，n，s 均为非负整数，则$f(x)=g(x)=h(x)=0$；4）此命题还可以推广为：若

$f(x)$，$g_i(x)(i=1, 2, \cdots, t)\in \mathbf{R}[x]$，且$f^2(x)=xg_1{}^2(x)+\cdots+xg_t{}^2(x)$，则$f(x)=g_1(x)=\cdots=g_t(x)=0$。

二 最大公因式、互素

在证明中，除灵活使用定义及有关性质外，还要注意使用组合的式子 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x), g(x))$，特别是关于互素的式子$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$。

例 3 证明：$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$，其中$h(x)$为首 1 多项式。

证明 设 $(f(x), g(x))=d(x)$，则有 $u(x)$，$v(x)$，使 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$，两边同乘以$h(x)$，得

$$(f(x)h(x))u(x)+(g(x)h(x))v(x)=d(x)h(x) \qquad (*)$$

因为：1）由 $d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$ 得 $d(x)h(x)|f(x)h(x)$，$d(x)h(x)|g(x)h(x)$；2）对于任意 $\phi(x)$，若 $\phi(x)|f(x)h(x)$，$\phi(x)|g(x)h(x)$，则由（*）知，$\phi(x)|d(x)h(x)$；所以，$d(x)h(x)$是$f(x)h(x)$与 $g(x)h(x)$的一个最大公因式。

最后，因为$h(x)$是首 1 多项式，所以，$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x), g(x))h(x)$。

说明 此例紧扣最大公因式的定义，利用组合的式子，得以证明。

例 4 证明：若$(f(x), g(x))=1$，则 $(f^2(x)-4g^2(x), g(x))=1$。

分析 由$f^2(x)-4g^2(x)=(f(x)+2g(x))(f(x)-2g(x))$知，先证$(f(x)+2g(x), g(x))=1$，$(f(x)-2g(x), g(x))=1$，再由互素性质得出。

证明 由$(f(x), g(x))=1$得，$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$。从而变形得，$(f(x)+2g(x))u(x)+g(x)(v(x)-2u(x))=1$，$(f(x)-2g(x))u(x)+g(x)(v(x)+2u(x))=1$，所以，$(f(x)$

$+2g(x)$, $g(x))=1$, $(f(x)-2g(x), g(x))=1$. 因此，由互素的性质得到，$(f^2(x)-4g^2(x), g(x))=1$.

例 5 证明：若 $a, b, c, d\in F$, 且 $ad-bc\neq 0$, $f(x)$, $g(x)\in F[x]$, 则 $(f(x), g(x))=(af(x)+bg(x), cf(x)+dg(x))$.

证明 设 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$, $g_1(x)=cf(x)+dg(x)$. (*)

因为，$(f(x), g(x))$是$f(x)$与$g(x)$的最大公因式，所以，由最大公因式的定义与整除的性质，根据(*)得，$(f(x),g(x))$是$f_1(x)$与$g_1(x)$的公因式，再由最大公因式的定义得，$(f(x), g(x))|(f_1(x), g_1(x))$.

由(*)变形得，$f(x)=(ad-bc)^{-1}(df_1(x)-bg_1(x))$，$g(x)=(ab-bc)^{-1}(ag_1(x)-cf_1(x))$，从而，同上可得，$(f_1(x), g_1(x))|(f(x), g(x))$.

因此，由$(f(x), g(x))$，$(f_1(x), g_1(x))$的约定，及整除的性质得$(f(x), g(x))=(f_1(x), g_1(x))$.

说明 1)证明本例必须熟知最大公因式的概念及整除的性质；2)通过证明互相整除来证明两多项式相等，是一个重要的方法，这也是对第一部分证明题的一个补充；3)当$a=1, b=0, c=1$, $d=\pm 1$时，$ad-bc=\pm 1\neq 0$，本例变为熟知的$(f(x), g(x))=(f(x), f(x)\pm g(x))$；4)注意，当$ad-bc=0$时，命题不成立，例如$f(x)=x$, $g(x)=-x$, $a=b=1$, $c=d=0$时，即为一反例.

三 整除

关于整除的题目较多，综合性较强，方法也较为灵活. 现概括为四个方面：1)利用多项式整除的定义及判定定理，2)利用多项式的最大公因式及多项式互素的性质，3)利用不可约多项式的性质，4)利用多项式的根及单位根的性质.

例6 证明：若 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$g_1(x)$，$g_2(x)\in F[x]$，$f_1(x)\neq 0$，$g_1(x)g_2(x)|f_1(x)f_2(x)$，$f_1(x)|g_2(x)$，则 $g_1(x)|f_2(x)$。

证明 因为，$g_1(x)g_2(x)|f_1(x)f_2(x)$，$f_1(x)|g_2(x)$，所以，根据整除的定义，可设$f_1(x)f_2(x)=g_1(x)g_2(x)h(x)$，$g_2(x)=f_1(x)l(x)$，从而$f_1(x)f_2(x)=g_1(x)f_1(x)l(x)h(x)$。又因为，$f_1(x)\neq 0$，所以，上式两端消去 $f_1(x)$，得到 $f_2(x)=g_1(x)l(x)h(x)$，再由整除定义，$g_1(x)|f_2(x)$。

说明 本例并不困难，容易直观地被接受，但是，头绪较多，要严格证明，就必熟悉整除的定义及多项式乘法消去律，并且细心推导。

例7 $g^2(x)|f^2(x)$当且仅当$g(x)|f(x)$。

证明1 充分性容易证明，从略。下面证明必要性。

若$f(x)=0$，则显然就有$g(x)|f(x)$。

若$f(x)\neq 0$，则$g(x)\neq 0$，从而$(f(x),g(x))=d(x)\neq 0$。设$f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，则$(f_1(x),g_1(x))=1$，并且 $f^2(x)=d^2(x)f_1^2(x)$，$g^2(x)=d^2(x)g_1^2(x)$。由$g^2(x)|f^2(x)$，$d(x)\neq 0$ 得，$g_1^2(x)|f_1^2(x)$。因为 $(g_1(x),f_1(x))=1$，所以$g_1(x)|f_1(x)$，从而$g_1(x)=c$，c为非零常数。因此$g(x)=cd(x)$，$g(x)|f(x)$。

证明2 充分性容易证明，从略。下面证明必要性。

若$f(x)=0$，则显然有$g(x)|f(x)$。

$f(x)\neq 0$，则$g(x)\neq 0$，从而可设$f(x)=ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)$，$g(x)=bp_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_r^{l_r}(x)$，其中$p_1(x)$，$p_2(x)\cdots$，$p_r(x)$是互异的首1不可约多项式，$k_i$，$l_i(i=1,2,\cdots,r)$为非负整数，则有，$f^2(x)=a^2p_1^{2k_1}(x)p_2^{2k_2}(x)\cdots p_r^{2k_r}(x)$，$g^2(x)=b^2p_1^{2l_1}(x)p_2^{2l_2}(x)\cdots p_r^{2l_r}(x)$。由

$g^2(x)|f^2(x)$ 及不可约多项式的性质得，$2l_i\leqslant 2k_i$，$l_i\leqslant k_i$，$i=1, 2, \cdots, r$。因此，$g(x)|f(x)$。

说明 1）本例容易推广为：$g^m(x)|f^m(x)$当且仅当 $g(x)|f(x)$，其中m是正整数；2）利用此例可以证明：若 $d(x)|f^2(x)$，$d(x)|g^2(x)$，则$d(x)|f(x)g(x)$。进一步还可证明：$(f^2(x), g^2(x))=(f^2(x), f(x)g(x), g^2(x))$；3）证明2的实质是应用多项式的标准分解式来讨论整除的问题。

例8 设 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$，$l(x)$ 满足 $(x^2+1)h(x)+(x+1)f(x)+(x+2)g(x)=0$，$(x^2+1)l(x)+(x-1)f(x)+(x-2)g(x)=0$，证明$x^2+1$整除$f(x)$与$g(x)$。

证明 对所给的两式相加得 $(x^2+1)(h(x)+l(x))+2x(f(x)+g(x))=0$，从而$(x^2+1)|2x(f(x)+g(x))$，但$(x^2+1, 2x)=1$，所以$(x^2+1)|(f(x)+g(x))$。

两式相减，同理证得$(x^2+1)|(2f(x)+4g(x))$。

综合以上两条，易证得$(x^2+1)|f(x)$，$(x^2+1)|g(x)$。

例9 证明$(x^2+x+1)|(x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3s+2})$，其中$m$，$n$，$s$是任意非负整数。

证明1 因为，$x^{3m}-1=(x^3-1)((x^3)^{m-1}+\cdots+x^3+1)$，$m\geqslant 2$，所以$(x^3-1)|(x^{3m}-1)$，而当$m=0$，$m=1$时，显然有$(x^3-1)|(x^{3m}-1)$。同理，$(x^3-1)|(x^{3n}-1)$，$(x^3-1)|(x^{3s}-1)$。又因为，$(x^{3n}-1)|(x^{3n+1}-x)$，$(x^{3s}-1)|(x^{3s+2}-x^2)$，并且$(x^2+x+1)|(x^3-1)$，所以，由整除的传递性，得，$(x^2+x+1)|(x^{3m}-1)$，$(x^2+x+1)|(x^{3n+1}-x)$，$(x^2+x+1)|(x^{3s+2}-x^2)$。但是$x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3s+2}=(x^{3m}-1)+(x^{3n+1}-x)+(x^{3s+2}-x^2)+(x^2+x+1)$，因此，$(x^2+x+1)|(x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3s+2})$。

证明2 记$f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3s+2}$。

在复数域C中考虑，设ε_1，ε_2 是 x^2+x+1的二根，则 ε_1^3

$=\varepsilon_2^{\ 3}=1$，且$x^2+x+1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)$。$f(\varepsilon_1)=\varepsilon_1^{\ 3m}+\varepsilon^{3n+1}+\varepsilon_1^{\ 3s+2}=(\varepsilon_1^{\ 3})^m+(\varepsilon_1^{\ 3})^n\varepsilon_1+(\varepsilon_1^{\ 3})^s\varepsilon_1^{\ 2}=1+\varepsilon_1+\varepsilon_1^{\ 2}=0$。同样，$f(\varepsilon_2)=0$。所以$(x-\varepsilon_1)|f(x)$，$(x-\varepsilon_2)|f(x)$。因为，$(x-\varepsilon_1,\ x-\varepsilon_2)=1$，所以，$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)|f(x)$，即$(x^2+x+1)|(x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3s+2})$。

因为，两个多项式的整除性不因数域的扩大而改变，所以，在原来的数域中结论成立。

说明 1）证明1仅用到整除的性质，但需要适当变形，并添加适当的项，技巧性较强；2）证明2是把问题放在复数域中来考虑，这是一种思想方法。

四　不可约多项式

证明一个多项式是不可约多项式，往往用反证法。对于有理数域上的多项式，还可以考虑用艾森斯坦因判别法。

例10 证明：设$p(x)$是$\mathbf{F}[x]$中次数>0的多项式，且对于任意$f(x)\in\mathbf{F}[x]$，都有$p(x)|f(x)$或$(p(x),\ f(x))=1$，则$p(x)$是$\mathbf{F}$上的不可约多项式。

证明 用反证法。设$p(x)$可约，则有$p_1(x),p_2(x)\in\mathbf{F}[x]$，使$p(x)=p_1(x)p_2(x)$，且$0<deg(p_1(x))<deg(p(x))$，$0<deg(p_2(x))<deg(p(x))$。取$f(x)=p_1(x)$，则$p(x)\nmid f(x)$，且$(p(x),\ f(x))=cp_1(x)\neq1$，引出矛盾。因此，$p(x)$是$\mathbf{F}$上的不可约多项式。

例11 证明：若$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$，其中$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$是两两不等的整数，则$f(x)$在$\mathbf{Q}$上不可约。

证明 用反证法。若$f(x)$在$\mathbf{Q}$上可约，则$f(x)$在$\mathbf{Z}$上可约，从而$f(x)=g(x)h(x)$，其中$g(x)$，$h(x)$都是整系数多项式，且次数均>0而$<n$。

由条件得$g(a_i)h(a_i)=-1$，从而$g(a_i)=1$、$h(a_i)=-1$或$g(a_i)=-1$、$h(a_i)=1$，$i=1,2,\cdots,n$。所以$g(a_i)+h(a_i)=0$

$(i=1, 2, \cdots, n)$，因此，$g(x)+h(x)$ 有n个两两不等的根 $a_1, a_2, \cdots, a_n$。但是，当$g(x)+h(x)\neq 0$时，$deg(g(x)+h(x))<n$，所以，由根的个数定理，必有 $g(x)+h(x)=0$，$g(x)=-h(x)$，$f(x)=-g^2(x)$，$f(x)$首项系数为1，而 $-g^2(x)$ 的首项系数为负数，引出矛盾。因此，$f(x)$在Q上不可约。

例12 证明x^4+1在Q上不可约。

证明1 用反证法。设x^4+1在Q上可约，则其分解式可能有如下两种情况：

1）含有一次因式。不妨设 $x^4+1=(x+a)(x^3+bx^2+cx+d)=x^4+(a+b)x^3+(ab+c)x^2+(ac+d)x+ad$，而$a, b, c$ $d\in Q$。由多项式相等的定义得，$a+b=0, ab+c=0$，$ac+d=0$，$ad=1$，从而，$a=-b$，$c=-ab=b^2$，$d=-ac=b^3, ad=-b^4=1$，但$b^4\geqslant 0$，引出矛盾（或，此时有有理根 $-a, (-a)^4=-1$ 引出矛盾）。

2）仅有二次因式。不妨设$x^4+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=x^4+(a+c)x^3+(ac+b+d)x^2+(ad+bc)x+bd$，而$a, b, c, d\in Q$。由多项式相等的定义得，$a+c=0, ac+b+d=0$，$ad+bc=0$，$bd=1$，从而$a=-c$，$b=-d+c^2$，$bc=dc$。当$c=0$时，$b=-d, -d^2=1$，引出矛盾；当$c\neq 0$时，$b=d$，$d^2=1$，$d=\pm 1$，$c^2=2b=\pm 2$，引出矛盾。

因此，x^4+1在Q上不可约。

证明2 设$x=y+1$，则$g(y)=f(x)=f(y+1)=(y+1)^4+1=y^4+4y^3+6y^2+4y+2$。取素数$p=2$，由艾森斯坦因判别法知，$g(y)$于Q上不可约，从而$f(x)$于Q上不可约。

说明 1）证明1仅用了基本概念，但较复杂；2）证明2较简单，较好，但用了特殊的判别法。

例13 设p是素数，证明$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^p}{p!}$ 在Q上

不可约。

证明 $g(x)=(p!)f(x)=p!+p!x+\frac{p!}{2!}x^2+\cdots+x^p=$ $x^p+px^{p-1}+\cdots+(3\cdot4\cdot\cdots\cdot p)x^2+(p!)x+p!$。取素数 p，由艾森斯坦因判别法知，$g(x)$ 于Q上不可约。再由不可约多项式的性质知，$f(x)$于Q上不可约。

五　重因式、重根

证明$f(x)$有无重因式的问题，要从$(f(x),f'(x))$出发。重根的问题归结为重因式问题，但要注意应用根的性质。

例14　证明$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$没有重因式。

证明　$f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$，$f(x)-f'(x)=x^n/n!$，从而，易证得$(f(x),\ f'(x))=(f(x),\ x^n/n!)$。$x^n/n!$只有$ax^i$（$a\in F$，$a\neq0$，$0\leqslant i\leqslant n$）型的因式，但其中只有$ax^0=a$整除$f(x)$，所以$(f(x),\ x^n/n!)=1$，$(f(x),\ f'(x))=1$，因此，$f(x)$没有重因式。

例15　证明 $f(x)=x^n+ax^{n-m}+b$（$n>m>0$）的非零根的重数$\leqslant2$。

证明　$f'(x)=nx^{n-1}+a(n-m)x^{n-m-1}=x^{n-m-1}g(x)$，而$g(x)=nx^m+a(n-m)$，则$f'(x)$的非零根必为$g(x)$的根。但 $g'(x)=nmx^{m-1}$，所以$g(x)$没有非零重根，即$f'(x)$的非零根均为单根。因此，$f(x)$的非零根的重数$\leqslant2$。

例16　证明多项式$f(x)=x^3+px+q$有重因式的必要充分条件是$4p^3+27q^2=0$。

证明1　$f(x)=x^3+px+q$ 有重因式的必要充分条件是$(f(x),\ f'(x))\neq1$。$f'(x)=3x^2+p$，分两种情况讨论。

1）若$(f(x),\ f'(x))=\frac{1}{3}f'(x)=x^2+\frac{p}{3}$，则有 $x^2+\frac{p}{3}$

$|f(x)$，用$x^2+\frac{p}{3}$除$f(x)$得余式$\frac{2p}{3}x+q$，所以$\frac{2p}{3}x+q=0$，从而$p=q=0$。

2）若$(f(x),\ f'(x))=x+a$，a是某一常数，则由辗转相除法得 $f(x)=\frac{1}{3}xf'(x)+\left(\frac{2p}{3}x+q\right)$，$f'(x)=\left(\frac{q}{2p}x-\frac{27q}{4p^2}\right)\cdot\left(\frac{2p}{3}x+q\right)+\left(p+\frac{27q^2}{4p^2}\right)$，从而，$a=\frac{3q}{2p}$，且 $p+\frac{27q^2}{4p^2}=0$，即$4p^3+27q^2=0$。

因此，$f(x)$有重因式的必要充分条件是$4p^3+27q^2=0$。

证明2 显然，三次多项式的重因式必是一次式，所以，$f(x)=x^3+px+q$有重因式的必要充分条件是$f(x)$有重根。

a是$f(x)=x^3+px+q$的重根$\Leftrightarrow f(a)=0,\ f'(a)=0$，即$a^3+pa+q=0,\ 3a^2+p=0$，从而 $a^3+pa+q=a(a^2+p)+q=a(-p/3+p)+q=(2p/3)a+q\Leftrightarrow 2pa+3q=0,\ a^2=-(p/3)\Leftrightarrow p=q=0$或$p\neq0$时$\left(-\frac{3q}{2p}\right)^2=-\frac{p}{3}$，即$4p^3+27q^2=0$。

因此，$f(x)$有重因式$\Leftrightarrow 4p^3+27q^2=0$。

证明3 设x_1，x_2，x_3是$f(x)=x^3+px+q$在复数域C中的三个根，则由韦达定理得，$\sigma_1=x_1+x_2+x_3=0$，$\sigma_2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=p$，$\sigma_3=x_1x_2x_3=-q$。再研究$x_1$，$x_2$，$x_3$的对称多项式 $(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2$，初等化得，$(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2=\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_1^3\sigma_3-4\sigma_2^3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2=-4p^3-27q^2$。

$f(x)$有重根$\Leftrightarrow(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2=0\Leftrightarrow 4p^3+27q^2=0$。

因为多项式是否有重因式不因数域的扩大而改变，所以$f(x)=x^3+px+q$在原来所给的数域上有重因式$\Leftrightarrow 4p^3+27q^2=0$。命题得证。

六　多项式的根

有关根的证明题，主要是利用根的各种性质，尤其是根的个数≤多项式次数这条性质；还要注意与整除、最大公因式等的联系。

例17　证明$\sin x$在实数域上不能表成x的多项式.

证明1　用反证法．设$\sin x$能表成x的多项式 $f(x)$，则由$\sin x$不是常数函数知，$f(x)\neq 0$，从而 $f(x)$ 至多有有限个根．但是，$\sin$有无穷多个根 $k\pi$ ($k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$)，引出矛盾．因此，$\sin x$不能表成x的多项式.

证明2 用反证法.设$\sin x$能表成x的多项式$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,则由$\sin x$不是常数函数知,$f(x)\neq 0$，从而可设$a_n\neq 0$.

$(\sin x)'=\cos x=\sum\limits_{i=1}^{n} ia_ix^{i-1}$．因为，$\sin^2x+\cos^2x=1$，所以$\left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i\right)^2+\left(\sum\limits_{i=1}^{n} ia_ix^{i-1}\right)^2=1$，从而，根据多项式相等的定义得，$n$必须等于零，并且$a_0{}^2=1$，即$a_0=\pm 1$，就得到 $\sin x=1$或-1，引出矛盾．因此，$\sin x$不能表成x的多项式.

说明　1）众所周知，$\sin x$是一个三角函数，从而，有人会认为本例不证自明．实际上，这样就没有理解本例的实质含义．所谓$\sin x$不能表成x的多项式，就是说，三角函数$\sin x$ 不能与任何一个实多项式函数相等，从而，这结论并不是显然的；2)同样地，其它的三角函数也均不能表成x的多项式.

例18　若实系数多项式$f(x)$无实根，且$f(x)$ 的首项系数为1，则有实系数多项式$g(x)$，$h(x)$，使得$f(x)=g^2(x)+h^2(x)$.

分析　由条件知，$f(x)$的根共轭成对出现；由结论知，需要有$g(x)+ih(x)$，$g(x)$，$h(x)$是实系数多项式，从而，就得出证明.

证明　由于，$f(x)$的首项系数为1，无实根，所以，$f(x)$

$=(x-\alpha_1)(x-\overline{\alpha_1})(x-\alpha_2)(x-\overline{\alpha_2})\cdots(x-\alpha_s)(x-\overline{\alpha_s})$. 记 $\phi(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_s)=g(x)+ih(x)$，其中 $g(x)$，$h(x)$均为实系数多项式，则$(x-\overline{\alpha_1})(x-\overline{\alpha_2})\cdots(x-\overline{\alpha_s})=\overline{\phi}(x)$ $=g(x)-ih(x)$. 所以，$f(x)=\overline{\phi}(x)\phi(x)=(g(x)+ih(x))$ $(g(x)-ih(x))=g^2(x)+h^2(x)$.

说明 利用本例，可以证明下面较复杂的命题：若$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_t(x)$是实系数多项式，则有实系数多项式$g(x)$，$h(x)$，使得$f_1^2(x)+f_2^2(x)+\cdots+f_t^2(x)=g^2(x)+h^2(x)$.

七 多元多项式

关于多元多项式的习题，证明时主要考虑使用多元多项式的基本概念及基本性质.

例19 证明：设$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $\in F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$，且$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\neq 0$. 若对于任意$k_1, k_2, \cdots, k_n\in F$，均有，当$f(k_1, k_2, \cdots, k_n)\neq 0$ 时，必$g(k_1, k_2, \cdots, k_n)=0$，则$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$.

证明 因为，对于任意 $a_i\in F(i=1, 2, \cdots, n)$，总有$f(a_1, a_2, \cdots, a_n)=0$或$f(a_1, a_2, \cdots, a_n)\neq 0$，所以，根据题设，总有$f(a_1, a_2, \cdots, a_n)g(a_1, a_2, \cdots, a_n)=0$，从而，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)g(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$. 又因为，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\neq 0$，所以，由消去律就得到 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $=0$.

说明 本例是一个很有用的命题，应注意在以后的某些章中的应用.

八 对称多项式

关于对称多项式的习题，证明时主要考虑使用对称多项式的基本概念及对称多项式基本定理.

例20 设$g(x)\in Q[x]$，$g(x)\neq 0$，α为 $f(x)=x^n-a_1x^{n-1}$

$+\cdots+(-1)^n a_n$的根，$f(x)\in Q[x]$，$\alpha\notin Q$。若$f(x)$的n个根都不是$g(x)$的根，则可以将分数$1/g(\alpha)$写为分母为有理数的分数。

证明 设$f(x)$的n个根为$\alpha=\alpha_1$，α_2，…，α_n，则由条件知，$g(\alpha_i)\neq 0$，$i=1, 2, \cdots, n$，从而，

$$\frac{1}{g(\alpha)}=\frac{g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)}{g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)}.$$

因为，$h=g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_n)$显然是$Q$上的一个$n$元对称多项式，所以，由对称多项式基本定理，$h$可以写为初等对称多项式的有理系数多项式。又，$g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)$是$x_i=\alpha_i(i=1, 2, \cdots, n)$时$h$的值，且由韦达定理，$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=a_1$，…，$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=a_n$，所以$g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)$是有理数。

说明 由本例可以设计一种分母有理化的方法。

§5 补充资料

I 最小公倍式

设$f(x)$，$g(x)\in F[x]$。若存在$m(x)\in F[x]$，使得，1）$f(x)|m(x)$，$g(x)|m(x)$；2）对于任意$n(x)\in F[x]$，$f(x)|n(x)$，$g(x)|n(x)\Rightarrow m(x)|n(x)$，则称$m(x)$是$f(x)$，$g(x)$的一个最小公倍式。

$[f(x), g(x)]$表示$f(x)$，$g(x)$的首项系数为1的最小公倍式。

$f(x)$，$g(x)$的最小公倍式在不计非零常数因式差别的情况下是唯一的。

设$d(x)$，$m(x)$分别是$f(x)$，$g(x)$的最大公因式与最小公倍式，则有非零常数c，使$d(x)m(x)=cf(x)g(x)$。特别地，当$f(x)$，$g(x)$均为首1多项式时，有$(f(x), g(x))[f(x), g(x)]=f(x)g(x)$。

若$f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$，则$m(x)$是$f(x)$，$g(x)$的最小公倍式$\Leftrightarrow(m(x)/f(x), m(x)/g(x))=1$。

对于$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$的最小公倍式，可以类似地进行讨论。

Ⅰ 整数的整除理论与因数分解理论

一 整除

设a,b是两个整数．若有$d\in \mathbf{Z}$，使$b=ad$，则称a整除b，记为$a|b$。否则，即对任意$d\in\mathbf{Z}$，均有$b\neq ad$，则称a不整除b，记为$a\nmid b$。当$a|b$时，称a是b的一个因数，b是a的一个倍数。

整除有下列性质：1）$a|b$，$b|c\Rightarrow a|c$；2）$a|b$，$a|c\Rightarrow a|(b+c)$；3）$a|b$，$c\in\mathbf{Z}\Rightarrow a|bc$；4）$a|b_i$，$c_i\in\mathbf{Z}$，$i=1,2,\cdots,t\Rightarrow a|(c_1b_1+c_2b_2+\cdots+c_tb_t)$；5）对任意$a\in\mathbf{Z}$，$1|a$，$(-1)|a$；6）对任意$a\in\mathbf{Z}$，$a|a$，$(-a)|a$，$a|(-a)$；7）$a|b$且$b|a\Leftrightarrow a=b$或$a=-b$；8）对任意$a\in\mathbf{Z}$，$a|0$；9）$0|a\Leftrightarrow a=0$；10）$a|b\Leftrightarrow(-a)|b\Leftrightarrow a|(-b)\Leftrightarrow(-a)|(-b)$。

带余除法．设a，$b\in\mathbf{Z}$，$a\neq 0$，则有唯一的q，$r\in\mathbf{Z}$，使$b=aq+r$，$0\leqslant r<|a|$。称q为商，r为余数．从而，当$a,b\in\mathbf{Z}$，$a\neq 0$时，$a|b\Leftrightarrow a$除b所得余数$r=0$。

二 最大公因数、互素、最小公倍数

设a，$b\in\mathbf{Z}$。若有$d\in\mathbf{Z}$，使得，1）$d|a$，$d|b$；2）$c\in\mathbf{Z}$，$c|a$，$c|b\Rightarrow c|d$，则称d是a，b的一个最大公因数。

简单性质：1）a，b的最大公因数是$0\Leftrightarrow a=b=0$；2）1，a的最大公因数是± 1；3）$a|b\Leftrightarrow a$，b的最大公因数是$\pm a$。

任意整数a，b均有最大公因数，且a，b的最大公因数在不计符号的情况下是唯一的。

用(a, b)表示a，b的非负的最大公因数。

对任意a，$b\in\mathbf{Z}$，有s，$t\in\mathbf{Z}$，使得$as+bt=(a,b)$。

若$(a,b)=1$，则称a，b互素，也记为$(a, b)=1$。

a，b互素$\Leftrightarrow$有s，$t\in \mathbf{Z}$，使得$as+bt=1$。

设a，$b\in \mathbf{Z}$。若有$m\in \mathbf{Z}$，使得，1）$a|m,b|m$；2）$h\in \mathbf{Z}$，$a|h$，$b|h\Rightarrow m|h$，则称m是a，b的一个最小公倍数。

用$[a, b]$表示a，b的非负的最小公倍数。

$|ab|=(a, b)[a, b]$。

关于多个整数的情况，可以类似地进行讨论。

三　素数

设p是大于1的整数。若p的正因数仅有1与p，则称p是素数（质数）。否则，称p为合数。

设$a>1$，则存在a的大于1的最小因数，且该因数是素数。从而，当$a>1$时，a必有素因数。

素数有无穷多个。

素数的性质：1）大于1的整数p是素数$\Leftrightarrow$对任意$a\in \mathbf{Z}$，有且仅有$(a, p)=1$与$p|a$之一；2）大于1的整数p是素数$\Leftrightarrow$对任意a，$b\in \mathbf{Z}$，由$p|ab$得$p|a$或$p|b$；3）p是素数，$p|a_1a_2\cdots a_s$ $\Rightarrow p$至少整除a_1，a_2，…，a_s之一。

四　唯一因子分解

设a是大于1的整数，则a可以表示为素数的积，且在不计因子次序时表示方法唯一。

当$a>1$时，$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$称为$a$的标准分解式（典型分解式），其中$p_1$，$p_2\cdots$，$p_s$是互异素数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$均为正整数。

Ⅱ　实根的界与个数

设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\in \mathbf{R}[x]$，$A=max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|)$，则$N=1+A/|a_0|$是$f(x)$的正实根的上界。

设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\in \mathbf{R}[x]$，$a_0>0$，$a_1$，…，$a_{k-1}\geqslant 0$，$a_k<0$，B是负系数的绝对值中最大的数，则

$1+\sqrt[k]{B/a_0}$ 是正实根的上界。

利用根的变换，可以由正实根的上界求得正实根的下界及负实根的上下界。

$$f_0(x)=f(x),\ f_1(x)=f'(x),$$
$$f_0(x)=f_1(x)q_1(x)-f_2(x),$$
$$f_1(x)=f_2(x)q_2(x)-f_3(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{s-2}(x)=f_{s-1}(x)q_{s-1}(x)-f_s(x),$$
$$f_{s-1}(x)=f_s(x)q_s(x).$$

多项式组$f_0(x)$，$f_1(x)$，$\cdots$，$f_s(x)$ 称为多项式 $f(x)$ 的斯图姆组。

对于有限个实数组成的有序组，若其中有两个相邻的实数符号相反，则称该组中出现了一个变号。该组中变号的总数，称为该组的变号数。

多项式$f(x)$的斯图姆组中的全体多项式在 $x=c$ 时的值组成的实数组$f_0(c)$，$f_1(c)$，$\cdots$，$f_s(c)$的变号数，称为$f(x)$在c点的变号数，记为$V(c)$。

斯图姆定理．设 $f(x)\in \mathbf{R}[x]$ 没有重根，a，$b\in \mathbf{R}$，$a<b$，且a，b都不是它的根，则$f(x)$在$(a,\ b)$内实根的个数等于$V(a)-V(b)$。

笛卡尔符号法则．实系数多项式$f(x)$的正根个数（重根按重数计算）或者等于$f(x)$的系数组的变号数，或者比变号数少一个正偶数。

Ⅳ　多元多项式的整除与因式分解

仅在$\mathbf{F}[x,\ y]$中讨论。

$\mathbf{F}[x,y]$中非零多项式$f(x,y)$按x的降幂排列写成：$f(x,y)=a_0(y)x^n+a_1(y)x^{n-1}+\cdots+a_n(y)$，其中$n$是非负整数，则称$n$是$f(x,\ y)$关于$x$的次数，记为 $deg_x(f(x,\ y))$．

设$f(x, y)$, $g(x, y)\in F[x, y]$, $g(x, y)\neq 0$，则存在$q(x, y)$, $r(x, y)\in F[x, y]$, $\phi(y)\in F(y)$，使得，$\phi(y)f(x, y)=g(x, y)q(x,y)+r(x,y)$，其中$r(x,y)=0$或$deg_x(r(x, y))<deg_x(g(x, y))$。

设$f(x, y)=a_0(y)x^n+a_1(y)x^{n-1}+\cdots+a_n(y)$。若$F[y]$中多项式$a_0(y)$, $a_1(y)$, $\cdots$, $a_n(y)$互素，则称$f(x, y)$是一个关于x的本原多项式，简称本原多项式。

本原多项式$d(x, y)$称为$f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $\cdots$, $f_s(x, y)$的本原最大公因式，若$d(x, y)$是$f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $\cdots$, $f_s(x, y)$的公因式，并且$f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $\cdots$, $f_s(x, y)$的任一本原公因式整除$d(x, y)$。

设$f(x, y)=a_0(y)x^n+a_1(y)x^{n-1}+\cdots+a_n(y)$，则$\phi(y)|f(x, y)\Leftrightarrow\phi(y)|a_i(y)$, $i=0, 1, \cdots, n$。

设$p(y)$是$F[y]$中一个不可约多项式。若$p(y)|f(x, y)g(x, y)$，则$p(y)|f(x, y)$或$p(y)|g(x, y)$。

设$f(x, y)$是一个本原多项式。若$f(x, y)|\phi(y)g(x,y)$，其中$\phi(y)\neq 0$，则$f(x, y)|g(x, y)$。

$F[x, y]$中任意s个多项式$f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $\cdots$, $f_s(x, y)$一定有最大公因式。

若$f_1(x,y)$, $f_2(x, y)$, $\cdots$, $f_s(x, y)$互素，则有$\phi(y)\neq 0$，及$\lambda_1(x, y)$, $\lambda_2(x, y)$, $\cdots$, $\lambda_s(x, y)$使得$\phi(y)=\lambda_1(x, y)f_1(x, y)+\lambda_2(x, y)f_2(x, y)+\cdots+\lambda_s(x, y)\cdot f_s(x, y)$。

不可约多项式的基本性质：

1）若$p(x, y)$是不可约多项式，则对于F中任意$c\neq 0$，$cp(x, y)$也是不可约多项式；

2）若$p(x, y)$是不可约多项式，则对于任意$f(x, y)\in F[x, y]$，或者$p(x, y)$与$f(x,y)$互素，或者$p(x, y)$整除

$f(x, y)$；

3）若$p(x, y)$是不可约多项式，$p(x, y)|f(x, y)\cdot g(x, y)$，则或者$p(x,y)|f(x, y)$，或者$p(x, y)|g(x, y)$；

4）若 $p(x, y)$ 是不可约多项式，$p(x, y)|f_1(x, y)\cdots f_s(x, y)$，则 $p(x, y)$至少整除$f_1(x, y)$，…，$f_s(x, y)$之一。

F$[x, y]$中每一个次数>0的多项式 $f(x, y)$都可以唯一地分解为 F$[x, y]$ 中有限个不可约多项式的乘积。所谓唯一性是说，若有$f(x, y)$的两个分解式$f(x, y)=p_1(x, y)p_2(x, y)\cdots p_s(x, y)=q_1(x, y)q_2(x, y)\cdots q_t(x,y)$，其中$p_i(x,y)$，$q_j(x, y)(i=1, 2, \cdots, s, j=1, 2, \cdots, t)$均为F$[x, y]$中的不可约多项式，则必有 $s=t$ ，并且，适当调换因式的次序后，有 $p_i(x, y)= c_iq_i(x, y)$，$c_i\neq 0$ ，$c_i\in$F，$i=1, 2, \cdots, s$。

多项式互素的性质：

1）若$f(x, y)$，$g(x, y)$都与$h(x, y)$ 互素，则$f(x, y)g(x, y)$也与$h(x, y)$互素；

2）若 $h(x, y)$整除 $f(x, y)g(x, y)$，而 $h(x, y)$ 与 $f(x, y)$互素，则$h(x, y)$一定整除$g(x, y)$；

3）若$g(x, y)$，$h(x, y)$都整除$f(x, y)$，而$g(x, y)$ 与 $h(x, y)$互素，则$g(x, y)h(x, y)$也整除$f(x, y)$。

对于$n(n>2)$元多项式，可以类似地讨论。

V 历史资料点滴

一 求根公式的历史

根据古埃及的文字记载，早在公元前1700年左右，人们就发现，当$a\neq 0$时，$ax=b$ 有根 $x=b/a$。到公元前几世纪，巴比伦（现在伊拉克的一部分）人实际上已经使用配方法得到$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的根$x=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a$。当时，人们只承

认正根。

公元九世纪的阿拉伯代数学家花拉子模著有《还原与对消的科学》一书，论述了用还原与对消（相当于移项、合并同类项）的方法解方程，该书的拉丁文译名“al—jabr”演变为现在的英文的“代数学”一词。可见方程是代数学的中心议题。

关于三、四次方程的求根公式，直到十五世纪还有不少人认为，高于二次的方程是不可解的。正是由于这种原因，十六世纪中最有才能的数学家都着力寻找三、四次方程的解法，包括求近似根的方法。直到欧洲文艺复兴时期，才由意大利数学家费尔洛、塔尔塔里亚、卡丹、费拉里解决。

三次方程的求根公式称为卡丹公式，这是因为该公式首次出现于卡丹于1545年出版的书《大术》里。寻找该公式有相当的难度，经历时间长，再由于当时数学界互相保密及公开挑战，从而围绕该公式有许多美妙动听的故事，为不少数学史著作增加了篇幅。

三次方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根是： $x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$， $x_2=\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$， $x_3=\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$，其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 为三次单位根， $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$。

在三次方程的求解问题解决后不久，卡丹的仆人（后成为其学生、朋友）费拉里就得到了四次方程的解法。

四次方程 $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 的四个根与下列两个方程的根相同：

$$x^2+(b+\sqrt{8y+b^2-4c})\frac{x}{2}+\left(y+\frac{6y-d}{\sqrt{8y+b^2-4c}}\right)=0,$$

$$x^2+(b-\sqrt{8y+b^2-4c})\frac{x}{2}+\left(y-\frac{6y-d}{\sqrt{8y+b^2-4c}}\right)=0,$$

其中y是$8y^3-4cy^2+(2bd-8e)y+e(4c-b^2)-d^2=0$的任一个根。

费拉里的成功，使得数学家们以极大的兴趣和自信致力于寻找五次方程的求根公式，从而，使得第一流的数学家们为之付出了近三个世纪之久的心血，终未成功。最后由阿贝尔给出了否定的解答。

我国秦、汉期间成书的《九章算术》已能解一般的一、二次方程。公元五世纪时，祖冲之就会解某些三次方程，宋朝的贾宪、杨辉已会用增乘开方法来求一般三次方程甚至四次方程的近似根，之后，秦九韶用正负开方术求高次方程的近似根。所有这些，在世界数学史上都占有重要地位。

二　阿贝尔与伽罗华

1824年，22岁的挪威数学家阿贝尔证明了高于四次的一般方程式没有求根公式；后来，他着手考虑一些特殊方程，称为阿贝尔方程，可以用求根公式求解。为此他最先引进了两个概念（虽然当时没有术语），即域和在给定域中不可约的多项式.阿贝尔然后着手探讨能用求根公式求解的全部方程的特性，可惜仅得出一些结果，于27岁逝世。

法国数学家伽罗华于19岁时彻底解决了阿贝尔未竟的问题，给出了方程可以用求根公式求解的必要充分条件。伽罗华引进了群的概念（虽然当时没有术语），建立了伽罗华理论，开创了代数学的新时代。伽罗华于21岁逝世。由于伽罗华的思想深刻，使得当时的数学大师也无法理解，所以在他死后38年，其理论才在《置换和代数方程专论》一书中得以全面阐述，此书为约当所著。

三　复数简史

历史证明，人类要接受一种新数，往往是非常困难的。第一个发现无理数的古希腊人希帕斯就被毕达哥拉斯学派的忠实信徒们抛进大海喂了鲨鱼。直到十九世纪，欧洲有些数学家还说负数“十分荒唐”，主张把它“从代数里驱逐出去”！

正当欧洲的数学家们被无理数和负数弄得晕头转向还没有完全清醒过来的时侯，他们又遇到了一种更为奇怪的数$\sqrt{-1}$。最早遇到这种数的人，是法国的舒开。第一个认真讨论这种这种数的人，是意大利的卡丹，他早在1545年研究三次方程的解法时，就把40作为$5+\sqrt{-15}$与$5-\sqrt{-15}$的乘积。然而这只不过是一种纯粹形式的表示而已。所以，那时许多人根本不承认负数开平方后还是“数”. 十七世纪的法国大数学家笛卡尔也说，负数开平方是“不可思议的”，因而把这样的“数”称为“虚数”。这个名词就一直沿用到现在。直到十八世纪中叶以前，除了牛顿等个别数学家有时提到虚数之外，关于虚数的理论很少发展，人们一直把它看成是无实际意义的东西而加以抵制。

1747年法国著名数学家达朗贝尔对复数的研究推进了一大步。他指出，若按照多项式的四则运算规则对虚数进行计算，则结果总是$a+b\sqrt{-1}$的形式（a，b都是实数）。这实际上提出了复数的概念。但是，“复数”这个名词是在十九世纪由德国数学家高斯给出的。

关于复数理论最系统的叙述，是由瑞士数学家欧拉给出的。他在1777年系统地建立了复数的理论，发现了复指数函数和三角函数间的关系，创立了复变函数论的一些基本定理，并且开始把它们用到水力学和地图学上。用符号“i”作为虚数的单位，也是他首创的。此后，复数才被人们广泛承认和使用。从虚数的出现到正式被人们承认，中间经历了两个多世纪。

在欧拉之后，挪威的一位测量学家外塞尔在前人工作的基础上，正式提出复数$a+bi$用平面上的点（a，b）来表示，从而形

成了复平面的概念。

十九世纪，经柯西、黎曼、魏尔斯特拉斯的努力，复变函数形成了系统的理论，并且渗入到代数学、数论、微分方程等数学分支，同时在流体力学、热力学等方面也有了很多应用。

二十世纪以来，复变函数论进一步深入到工程部门中去，例如，儒可夫斯基以复变函数作为基本工具，创造了机翼理论。同时，复变函数论也越来越多地应用到理论物理、弹性理论、天体力学等方面。现在，复数和复变函数的理论，已成为科学家和技术人员普遍熟悉的数学工具。虚数之“虚”只剩下历史上的含义了。

四　代数基本定理的历史

若谈到方程的实际解法，则大量事实证明，用求根公式解方程的方法对一切代数方程而言，是远远不够的，除了二次方程之外，即使有求根公式，但由于公式的复杂性也难于奏效。

因此，数学家们对代数方程理论的研究，很早就着手在其它三个方面进行工作。即：1）关于根的存在问题；2）在解不出方程的情况下，按照它的系数去探索它的根的一些性质，例如，是否有实根的问题及根的个数的问题；3）关于根的近似计算问题.

显然，首先要证明的是：每一个实系数或复系数 n（$n>0$）次代数方程总是至少有一个实根或复根，这就是所谓代数基本定理，它是数学中最重要的定理之一。数学家认识到这个定理是很早的事情了，时间可以上溯到1608年的罗特，以后是1692年的基拉德。1742年12月15日欧拉在一封信中明确地陈述了这个定理。

但是，很久没有人给出该定理的严格证明。正是由于它的证明的困难以及具有基本性质，所以才被称之为“代数基本定理”.就实质而言，证明该定理的大部分方法，与其说是代数的，不如说是无穷小分析的。该定理的第一个证明是达朗贝尔在1746年给出的，但他的证明在后来发现有一点是不充分的。后来，欧拉于

1749年，拉格朗日于1772年，都试证过该定理。历史上，该定理的第一个严格证明通常认为是高斯给出的，然而，实际上，高斯的证明也需要作补充，而且并不少于达朗贝尔。

高斯非常重视该定理，曾经给出四个严格证明，第一个是在1797年（时年仅20岁），这是他的博士论文（1799年发表）。第四个发表于1850年，和第一个相隔整整半个世纪。“代数基本定理”这一名称看来也是他提出来的。

§6 基本习题

1．试确定a，b，使x^2-2x+4能整除x^4+3x^2+ax+b。

2．设$f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$，$g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$，试求$u(x)$，$v(x)$，使$f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x),g(x))$。

3．判断多项式$f(x)=\frac{1}{5}x^5-2x^3-4x-3x-\frac{4}{5}$有无重因式，若有，试求出重因式及其重数。

4．设$f(x)=3x^4-5x^3+3x^2+4x-2$有一个根是$1+i$，试求$f(x)$在$Q[x]$中的标准分解式。

5．试把n元对称多项式$f=x_1^4+\cdots+x_n^4$初等化。

6．证明：$x|f^k(x)\Leftrightarrow x|f(x)$，其中$k$是正整数。

7．证明：$(f(x),g(x))=1\Rightarrow(f^2(x),g^3(x))=1$。

8．证明：若$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$是整系数多项式且$bd+cd$是奇数，则$f(x)$在Q上不可约。

9．证明：设$f(x)\in F[x]$，$deg(f(x))=n\geqslant 1$，则$f'(x)|f(x)\Leftrightarrow f(x)=a(x-b)^n$，$a$，$b\in F$。

10．设a，b，c是实数，证明a，b，c都是正数的必要充分条件是$a+b+c>0$，$ab+bc+ca>0$，$abc>0$。

第二章　行　列　式

§1　概括说明

行列式的理论起源于解二元线性（一次）方程组及更多元的线性方程组。行列式是代数学中的一个基本概念，它不仅是求解线性方程组的有力工具，而且在代数学的其它部分也常用到。同时，也常用于数学的其它学科以及其它的科学技术领域。

本章的内容分为六个部分：行列式的定义，行列式的性质，行列式按行（列）展开，行列式的乘法，行列式的计算，克兰姆规则。

定义行列式可以采用几种不同的方法，我们采用以排列为工具作定义的方法。先由解线性方程组引入二阶、三阶行列式，而后研究排列的有关问题，最后给出行列式的定义。

行列式的性质首先是行与列的对称性，从而，对行成立的性质对列均成立。另外的性质分为两类：基本的性质和派生的性质。前者是由定义直接推出的，后者则是由已证明的性质而推出的。

行列式按行（列）展开，是行列式的更为深刻的性质。其中，按一行（列）展开的结论将用于建立克兰姆规则，而按若干行（列）展开的结论将用于建立行列式的乘法规则。

行列式的乘法规则具有重要的理论意义，在以后研究矩阵乘积的秩时将用到。

行列式的计算是本章的主要内容，甚至可以说是本章的核心。我们要综述各种常见的计算方法与技巧，同时，还要讲述机械计算法。行列式的计算是十分困难且十分复杂的，但是基本思想是清楚的，方向也是明确的。计算行列式的基本思想就是化

零，即，运用行列式的性质，特别是运用倍加不变性，把行列式的元素化成更多的零．当然不是乱化零，而是按一定的方向去做，化成三角形或者化成某一行（列）中除一个元素外其余元素均为零，即所谓的化三角形法和降阶法．

克兰姆规则是行列式理论的一个直接应用．

本章的补充资料是：行列式的其它定义方法，历史资料点滴．

§2 内容提要

I 行列式的定义

一 二阶与三阶行列式

研究二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

用加减消元法，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，就得到

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

为了书写方便，引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

从而，类似地就有

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

于是，就简单地记为 $x_1 = D_1/D$，$x_2 = D_2/D$．

上面的这种通过一定的规则计算出来的并且用特定的符号

（记号）表示的数D、D_1、D_2，称为二阶行列式。

同样地，研究三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases},$$

就引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

分析二阶行列式与三阶行列式，得到下列三条规律：

1）项数：二阶行列式有2!项，三阶行列式有3!项；

2）项的结构：由行列式中不同行不同列的元素的乘积而成；

3）项的符号：在总项数中有一半项取正号，另一半项取负号，正负号由元素所在的行数与列数决定。

我们将由此进行推广，引进n阶行列式。

二　排列

n个数码1，2，…，n组成的一个有序组称为一个n级排列，记为$j_1j_2\cdots j_n$，$i_1i_2\cdots i_n$等。n级排列的总数是$n!$。

在一个n级排列$j_1j_2\cdots j_n$中，若一对数码的前后位置与其大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，则称它们构成排列的一个逆序（反序）。一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数。排列$j_1j_2\cdots j_n$的逆序数，记为$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$。

排列$12\cdots n$中没有逆序，称$12\cdots n$为自然顺序排列。

求排列$j_1j_2\cdots j_n$的逆序数的方法如下：从1开始，求出$\tau(1)$，$\tau(1)$是1的前面的数码的个数，去掉1；求出$\tau(2)$，$\tau(2)$是2的前面的数码的个数，去掉2；…；直至n，从而，$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=\tau(1)+\tau(2)+\cdots+\tau(n)$。或者，类似地：从$n$开始，求出$\tau'(n)$，$\tau'(n)$表示$n$的后面的数码的个数，去掉$n$；

$\cdots$，从而，$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=\tau'(n)+\tau'(n-1)+\cdots+\tau'(2)+\tau'(1)$。

在一个排列中，交换两个数码i与j的位置，而其余的数码不动，就得到另一个排列，这种对排列所作的变换手续称为对换，记作(i, j)。任意排列$i_1i_2\cdots i_n$都可以经过一系列对换而变为另一个排列$j_1j_2\cdots j_n$。任一个对换把全部$n(n\geqslant 2)$级排列两两配对，使得两个配成对的排列在该对换下互变。逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列。对换改变排列的奇偶性。当$n\geqslant 2$时，$n!$个n级排列中奇、偶排列各占一半，即各有$n!/2$个。

任意一个n级排列与排列$12\cdots n$都可以经过一系列对换互变，并且，所作对换的个数的奇偶性与该排列的奇偶性相同。

三　n阶行列式的定义

数域F上的n^2个数写为如下的形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

表示F中的一个数，称为数域F上的一个n阶行列式：它是$n!$项的代数和，每一项都是取自不同行不同列的n个元素的乘积$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，该项的符号是$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$表示对一切$n$级排列$j_1j_2\cdots j_n$求和。

符号定理：若$i_1i_2\cdots i_n$与$j_1j_2\cdots j_n$是两个n级排列，则

$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$是$n$阶行列式的一项，且该项的符号是

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

n阶行列式也可以定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

n阶行列式的两种定义彼此等价.

Ⅱ　行列式的性质

一　行与列的对称性

若把行列式D的行相应地写为列，得到一个新的行列式D'，则称D′是D的转置行列式. 行列式D与其转置行列式 D′ 相等，D＝D′. 换 言 之，行列互变，行列式不变. 于是，行列式的行与列处于完全平等的地位，对行成立的性质，对列同样地成立. 下面，为了叙述的方便，我们仅对行进行讨论.

二　基本的性质

行列式D的某一行的公因子k可以提到 行列 式D的外边（单行因子可提性）.

若行列式D的第i行各元素都是两项之 和，则行 列式D可以拆成两个行列式D_1与D_2之和，其中D_1除第i行是D的第i行的第1 项外，其余诸行与D相同，D_2除 第i行 是D的 第i行 的第 2 项外，其余诸行与D相同. 对于第i行的各元素都 是s 项之和 的情况，则等 于s个 行列式之和（单行可加性）.

若行列式有两行元素相同，则该行列式为零.

三　派生的性质

若行列式有两行成比例，则该行列式为零.

一行的倍数加到另一行，行列式不变（倍加不变性）.

对换行列式两行的位置，行列式反号。

Ⅲ　行列式展开定理

一　总论

行列式的展开定理揭示了行列式的更深刻的性质，给出了计算行列式过程中高阶向低阶转化的可能性及其依据。

二　子式、余子式、代数余子式

在一个n阶行列式D中，任意 选定k行、k列（$1\leqslant k\leqslant n$），设为第i_1，i_2，…，i_k行，第j_1，j_2，…，j_k列（$1\leqslant i_1<i_2<<\cdots<i_k\leqslant n$，$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$），位于这些行和列的交点处的$k^2$个元素按照原来的位置组成一个$k$阶行 列式，称 为行列式D的$k$阶子式，记 为$M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$，或简 记为M。而D中划去这$k$行、$k$列（$1\leqslant k\leqslant n-1$）后余 下 的$(n-k)^2$个 元素 按照原来的位置组成一个$n-k$阶行列式，称为$k$阶子式M的余 子 式，记为$\overline{M}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$，或简记为$\overline{M}$。

n阶行列式D的k阶子式共有$(c_n^k)^2$个。

设$M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$是行列式D的$k$阶 子式，$\overline{M}$ 是 它 的 余子式，则称　$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}\overline{M}$

为$M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$的代数余子式，记为$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$，即

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}\ \overline{M}.$$

特别地，当$k=1$时，行列式D的一阶子式就 是由 一个元素组成的一阶行列式$|a_{ij}|=a_{ij}$，而a_{ij}的余子式为$n-1$阶 行列式，记为M_{ij}，它的代数余子式记为A_{ij}，即　$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

三　行列式按一行（列）展开

行列式任意一行（列）的元素与它们的代数余子式乘积的和等于行列式的值，而任意一行（列）的元素与另一行（列）的元素的代数余子式乘积的和等于零．即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik}=\begin{cases} D(i=j); \\ 0\ (i\neq j). \end{cases} \quad (n\geqslant 2)$$

或
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D\ (i=j\ ); \\ 0\ (i\neq j)\ . \end{cases} \quad (n\geqslant 2\ )$$

四　行列式按若干行（列）展开

拉普拉斯展开定理．设在$n(n\geqslant 2)$阶行列式D中任意取定了k行（列），$1\leqslant k\leqslant n-1$．由这$k$行（列）元素组成的所有$k$阶子式与它们对应的代数余子式乘积的和等于行列式D．即

$$D=\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix},$$

或
$$D=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}.$$

Ⅳ　行列式的乘法

设有两个n阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则
$$D_1D_2=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}, \quad 其中 c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

i，$j=1$，$2\cdots$，n．即所谓“行乘列”法则．类似地，还有“行乘行”、“列乘行”、“列乘列”法则．共四种乘法规则．

V 行列式的计算

一 总论

行列式的计算，其基本思想与步骤是：

1）根据所给行列式的特点，用行列式的性质把行列式化为一些特定型式（特殊行列式、已知行列式）或较简单的型式（如一些行或列中出现较多的零）；

2）按特定型式的行列式计算出值来，特别地，常常考虑化为三角形行列式，即所谓化三角形法；或者，选择含零最多的行（列）进行展开，化为较低阶的行列式，特别地，常常考虑把某一行（列）化为除一个元素外其余全是零，即所谓降阶法．

大多数情况下，要交替使用1）与2），从而使行列式逐次简化逐次降阶，最后求出行列式的值来．

二 特殊行列式

设有行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}组成D的主对角线，a_{1n}，$a_{2,n-1}$，…，$a_{n-1,2}$，a_{n1}组成D的副对角线．

上(下)三角形行列式：主对角线以下(上)元素全为0．对角形行列式：主对角线之外的元素全为0．它们的值都等于其主对角线元素之积．

范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{aligned}&(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\\ &(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &(a_n-a_{n-1})\end{aligned}$$

$$=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).$$

三 机械计算法

设有n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

不妨设$a_{11}\neq 0$，否则，可通过交换行或列，而使a_{11}位置的元素不为零，且采用在一行（列）的元素前面添负号的办法，使行列式的值不变．分别将第1行的$-a_{i1}/a_{11}$倍加于第i行($i=2$, $\cdots$, n)，则使第1列的a_{11}之外的元素全为零，从而有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}.$$

对于a'_{22}，用同样的方法，使第2列的a'_{22}之下的元素全变为零，即，假定$a'_{22}\neq 0$，第2行的$-a'_{i2}/a'_{22}$倍加于第i行($i=3$, $\cdots$, n).

如此下去，至第$n-1$行，得到

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a^{1}_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

定理．任一个n阶行列式都可以化为一个等值的三角形行列列式，且所进行的乘法（除法）的次数不超过$(n^3+2n-3)/3$就计算出该行列式．

这种计算方法程序固定，较为机械，从而被称为机械计算法。特别地，对于数字元素的行列式，已能够用计算机计算。

四　常用计算方法

全1行（列）法：根据行列式的特点，将各行（列）的元素全加到第一行（列），得到相同的元素，再将该相同元素提出行列式之外，使得第一行（列）全是1．

递推法：先求出行列式与其类型相同的低阶行列式之间的递推关系，然后，利用该递推关系来计算行列式．

加边法：将所给的行列式添加一行一列，但保持行列式的值不变．

拆项法：将一行列式拆成若干个行列式的和．

提因子法：提出行列式的全部因子．

归纳法：通过计算2阶、3阶，找到规律，再用数学归纳法进行证明．

各种具体的例子将在§4中给出．

Ⅵ　克兰姆规则

将行列式的理论用于求解n个未知量n个方程的线性方程组，得到下面的

克兰姆规则．对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases},$$

当系数行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$

时，有唯一解$x_j=D_j/D$，$j=1，2，\cdots，n$，其中

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0, \end{cases}$$

若有非零解，则其系数行列式必为零.

§3 重点难点

本章的主题词是：二阶行列式，三阶行列式，n级排列，逆序数，奇排列，偶排列，对换，n阶行列式，符号定理；行与列的对称性，转置行列式，单行因子可提性，单行可加性，倍加不变性；子式，余子式，代数余子式，按一行（列）展开，拉普拉斯定理；行列式乘法；降阶法，三角形行列式，主对角线，范德蒙行列式，机械计算法；线性方程组，系数行列式，克兰姆规则，齐次线性方程组，非零解.

本章的基本方法是：排列逆序计算法，n阶行列式定义计算法，行列式降阶计算法，行列式化三角形计算法，行列式常用计算方法（全1行（列）法、递推法、加边法、拆项法、提因子法、归纳法），线性方程组克兰姆规则解法.

本章的重点是：行列式的性质，行列式的计算，克兰姆规则.

行列式的性质是行列式理论的基础和主要部分，是计算行列式的依据，也是应用行列式解决其它问题的依据，从而，成为本

章的一个重点。行列式的性质包括：行与列的对称性，基本的性质，派生的性质，展开定理。其中，行列式的展开定理是更深刻、更重要的性质。

行列式作为一种工具应用于数学某些分支及其它科学技术部门，相当多的情况下是计算行列式，所以，行列式的计算是本章的核心问题。同时，通过行列式的计算，反过来进一步认识行列式性质的重要性，并且，进一步深刻理解行列式性质的实质。因此，行列式的计算成为本章的一个重点。行列式的计算是一项技巧性很强的工作，虽然有某些较为一般的方法供参考和使用，但是，具体问题具体分析仍是关键所在。

克兰姆规则是行列式理论的一个直接应用。行列式起源于解线性方程组，换言之，起源于推广二元线性方程组的克兰姆规则到n元的情况；并且，没有行列式的一整套理论，要证明克兰姆规则是不可能的；所以，就一定意义而言，行列式理论的发生及归宿就是克兰姆规则。此外，克兰姆规则自身也具有重要的理论与实践意义。因此，克兰姆规则成为本章的一个重点。

本章的难点是：行列式的定义，行列式的展开定理，行列式的计算。

n阶行列式的定义是抽象的，由于n是一般的自然数，所以，行列式的记号、项、排列等都采用了省略号的写法，这在形式上就不大习惯；而且，又要以排列及排列的逆序数作为基础，$n!$个项与排列紧密相关，从而，比较难以理解其实质。因此，成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1）写出并分析二阶行列式、三阶行列式的所有项，从而总结出基本规律，为n阶行列式的定义打好实际基础；2）强调行列式的本质就是用特定符号表示的一个数，该数是$n!$项的代数和，这个代数和中的每一项不仅与构成行列式的n^2个数有关，也与这些数的排列位置有关；3）通过计算某些特殊行列式（例如三角形行列式），加深对于项的

取法及确定项的符号等的理解。

行列式的展开定理是行列式的更深刻的性质。建立展开定理要用到子式、余子式、代数余子式的概念；证明展开定理要用到行列式的定义及已有的性质，并有一定的技巧；所以，综合性较强。因此，成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1）先用三阶行列式展为二阶行列式的例子，熟悉展开定理；2）正确理解代数余子式的概念；3）将证明分为几种情况，由特殊到一般，完成证明。

行列式的计算，既是本章的一个重点，又是本章的一个难点。行列式各种各样，没有一般的计算方法，所以，计算行列式是技巧性很强的工作。因此，成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1）明确基本思想是化零，方向是化三角形法和降阶法；2）计算之前要认真地观察行列式的特点，一般地，着重观察行的特点、列的特点、对角线的特点，然后根据其特点作化零试验；3）熟悉一些较基本的方法及典型例子，从而开阔思路；4）多做题目并注意总结，从而不断提高分析能力与应变能力。

§4 习题类解

Ⅰ 计算题

一 排列的逆序数及奇偶性

掌握排列的逆序数的计算方法及排列奇偶性的定义，就可以解决此类问题。

例1 选择i与k，使$1274i56k9$成偶排列。

解 显然i与k只能选择3与8。设$i=3$，$k=8$，则得排列127435689。计算得出，此排列的逆序数是5，是奇排列。但是，由于对换改变排列的奇偶性，所以，取$i=8$，$k=3$，就得到127485639是偶排列。

例2 计算$2n$级排列$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$的逆序数，并

确定其奇偶性。

分析 给定的排列中，前n个数码1，3，5，…，$(2n-1)$之间不构成逆序，后n个数码2，4，…，$(2n)$之间也不构成逆序，只有前n个数码与后n个数码之间才构成逆序。

解 $\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))$

$=\tau(1)+\tau(2)+\tau(3)+\tau(4)+\cdots+\tau(2n-3)+\tau(2n-2)+\tau(2n-1)+\tau(2n)$

$=0+(n-1)+0+(n-2)+\cdots+0+1+0+0=n(n-1)/2$。

当$n=4k$，$4k+1$时为偶排列；当$n=4k+2$，$4k+3$时为奇排列。

二 确定行列式的项及项的符号

根据行列式的定义，可以确定行列式的具有某些性质的项，也可以确定项的符号。

例3 写出四阶行列式中所有带负号且包含a_{23}的项。

解 这样的项可以设为$a_{1i}a_{23}a_{3j}a_{4k}$。要使其带负号，当且仅当其列标所构成的排列$i3jk$为奇排列。而i，j，k只能取1，2，4中的数，例如取$i=1$，$j=2$，$k=4$，则得1324，它是一个奇排列。由于对换改变排列的奇偶性，所以可得4312，2341（3在第二个位置不动）也是奇排列。而且，再也没有满足条件的别的奇排列（3在第二个位置的排列共6个），因此，所求的项是：$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$，$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$。

例4 下列各乘积是否是4阶行列式中的项？若是，试确定应取的符号：

1）$a_{11}a_{23}a_{14}a_{42}$；2）$a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}$。

分析 根据n阶行列式的定义，每一项都是不同行不同列的n个元素的乘积，所以，若发现n个元素的乘积中有两个元素取自同一行或同一列，则可以断定该乘积不是n阶行列式的项，而要断定乘积中是否有同行或同列元素，只要看这n个元素中是否有

相同的行标或相同的列标。

解 1）因为，$a_{11}a_{23}a_{14}a_{42}$中元素a_{11}与a_{14}均为第一行的元素，所以，$a_{11}a_{23}a_{14}a_{42}$不是4阶行列式中的项。

2）因为，$a_{34}a_{12}a_{42}a_{21}$中元素的行标互不相同，列标也互不相同，所以，$a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}$是4阶行列式的项。又，$a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}=a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$，而$\tau(2143)=2$，所以$a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}$应取正号。

例5 选择i与k，使$a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$成为5阶行列式中一个带负号的项。

解 由于$a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}=a_{1i}a_{25}a_{32}a_{4k}a_{53}$，所以，只须使$i52k3$成为一个5级奇排列。若取$i=1$，$k=4$，则所得排列15243的逆序数为4，是偶排列，该项应带正号。因为对换改变排列的奇偶性，所以，取$i=4$，$k=1$时，则该项带负号。

三 行列式的计算

关于行列式的计算，分为五个部分：利用定义，机械计算法，利用特殊行列式，降阶，常用计算法举例。当然，这五部分在逻辑上并不是并列关系，仅仅是为了叙述方便才这样划分为五部分。

1 利用定义

有的行列式利用定义直接计算反而简单。

例6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 D的一般项可表示为$a_ib_jc_kd_se_t$，其中$ijkst$是任意一个5级排列，而且c_r，d_r，e_r，（$r=3$，4，5）都是0。由于k，s，t是1，2，3，4，5中的三个不同的数，所以，至少

要取到3，4，5中的一个数，从而，在D的展开式的每个项中至少有一个因子是0，因此，D的每一项都是0，D＝0。

说明 显然，本例可直接用拉普拉斯定理。

例7 求行列式$f(x)$中x^4与x^3的系数。

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

解 根据行列式定义，只有主对角线上的元素相乘才会出现x^4，且该项带正号，所以，$f(x)$中x^4的系数是2。

同样，含x^3的项也只有$x\cdot 1\cdot x\cdot x$，该项的列标构成排列2134，而$\tau(2134)=1$，所以，$f(x)$的含x^3的项是$-x^3$，其系数是-1。

2 机械计算法

根据§2，V，三，所述的机械计算法的程序，对数字元素的行列式进行变形，化为三角形行列式，而后求出值。

例8 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$

解 $D=\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$

$=-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$

$=-1\cdot(-13)\cdot 16\cdot(3/2)=312.$

3　利用特殊行列式

对于所要计算的行列式，直接利用已知的行列式，或者经过简单的变化之后，再利用已知的行列式。

例 9　计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解　$$D=x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

例10　计算$n+1$阶行列式

$$\begin{vmatrix} \sin^n\alpha_1 & \sin^{n-1}\alpha_1\cos\alpha_1 & \cdots & \sin\alpha_1\cos^{n-1}\alpha_1 & \cos^n\alpha_1 \\ \sin^n\alpha_2 & \sin^{n-1}\alpha_2\cos\alpha_2 & \cdots & \sin\alpha_2\cos^{n-1}\alpha_2 & \cos^n\alpha_2 \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \sin^n\alpha_{n+1} & \sin^{n-1}\alpha_{n+1}\cos\alpha_{n+1} & \cdots & \sin\alpha_{n+1}\cos^{n-1}\alpha_{n+1} & \cos^n\alpha_{n+1} \end{vmatrix}$$

其中$\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cdots\sin\alpha_{n+1}\neq 0$.

解　$D=(\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cdots\sin\alpha_{n+1})^n\cdot$

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin^{-1}a_1\cos a_1 & \cdots\sin^{-(n-1)}a_1\cos^{n-1}a_1 & \sin^{-n}a_1\mathrm{con}^n a_1 \\ 1 & \sin^{-1}a_2\cos a_2 & \cdots\sin^{-(n-1)}a_2\cos^{n-1}a_2 & \sin^{-n}a_2\cos^n a_2 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 1 & \sin^{-1}a_{n+1}\cos a_{n+1} & \cdots\sin^{-(n-1)}a_{n+1}\cos^{n-1}\alpha_{n+1} & \sin^{-n}a_{n+1}\cos^n a_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$=(\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cdots\sin\alpha_{n+1})^n$$

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(\sin^{-1}\alpha_j\cos\alpha_j-\sin^{-1}\alpha_i\cos\alpha_i)$$

$$=(\sin\alpha_1\cdots\sin\alpha_{n+1})^n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\frac{\sin\alpha_i\cos\alpha_j-\cos\alpha_i\sin\alpha_j}{\sin\alpha_i\sin\alpha_j}$$

$$=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(\sin\alpha_i\cos\alpha_j-\cos\alpha_i\sin\alpha_j)$$

$$=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\sin(\alpha_i-\alpha_j).$$

说明 若$\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cdots\sin\alpha_{n+1}=0$，采用其它方法进行计算，可得同样结果。

4 降阶

降阶是计算行列式的一个基本思想，这里的降阶，意思是：运用行列式的性质进行恒等变形，而后按一行（列）展开。进行恒等变形时，常用下列的方法。

方法1 把某一行（列）的倍数加于其余各行（列）。

例11 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}$.

解 由于行列式的主对角线上的元素依次是1，2，…，n，而其余的元素都是2，所以，把第2行的-1倍加于其余各行，而后再按第1行展开，得到

$$D=\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0\\2&2&2&\cdots&2\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}2&2&\cdots&2\\0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}=(-2)((n-2)!)$$

方法2 所有各行（列）加于某一行（列）。

例12 计算$n+1$阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

解 其余各行均加于最后一行，而后按最后一行展开，得到

$$D=\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n+1 \end{vmatrix}$$

$$=(n+1)\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix}$$

$=(-1)^n(n+1)a_1a_2\cdots a_n$。

方法3　逐行（列）相加。

例13　计算n阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$

解　第1列的x倍加于第2列，新的第2列的x倍加于第3

列，如此下去，得到D＝

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+x & 3+2x+x^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)x+\cdots+x^{n-2} & n+(n-1)x+\cdots+x^{n-1} \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

再按最后一列展开，得到

$$D=[n+(n-1)x+\cdots+x^{n-1}](-1)^{1+n}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}(-1)^{n-1}[n+(n-1)x+\cdots+x^{n-1}]$$

$$=n+(n-1)x+\cdots+x^{n-1}.$$

5　常用计算法举例

方法1　全1行（列）法

例14　计算$n+1$阶行列式　$D=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$.

解　把各列都加到第1列，得

$$D=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

第1列的$(-a_1)$，$(-a_2)$，…，$(-a_n)$倍分别加到第2列，3列，…，$n+1$列，得

$$D=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\prod_{j=1}^{n}(x-a_j).$$

方法2　递推法

例15　计算n阶行列式　$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$.

解　把D_n的最后1列改写为和式：$y+0$，$y+0$，…，$y+0$，$y+(x-y)$，而后写为两个行列式之和，

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & 0 \\ z & x & y & \cdots & y & 0 \\ z & z & x & \cdots & y & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x & 0 \\ z & z & z & \cdots & z & x-y \end{vmatrix}$$

$$=y\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & 1 \\ z & x & y & \cdots & y & 1 \\ & z & x & \cdots & y & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x & 1 \\ z & z & z & \cdots & z & 1 \end{vmatrix}+(x-y)D_{n-1}$$

$$=y\begin{vmatrix} x-z & y-z & y-z & \cdots & y-z & 1 \\ 0 & x-z & y-z & \cdots & y-z & 1 \\ 0 & 0 & x-z & \cdots & y-z & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}+(x-y)D_{n-1}$$

$$=(x-y)D_{n-1}+y(x-z)^{n-1}$$

把D_n的转置行列式按上述步骤计算，得

$$D_n=(x-z)D_{n-1}+z(x-y)^{n-1}$$

当$y\neq z$时，由上两个递推关系式求得

$$D_n=\frac{z(x-y)^{n-1}(x-y)-y(x-z)^{n-1}(x-z)}{(x-y)-(x-z)}$$

$$=\frac{z(x-y)^n-y(x-z)^n}{z-y};$$

当$y=z$时，仿照例14，可以求得

$$D_n=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}.$$

说明 递推关系式大体上可以分为三种情况：1) $D_n=\alpha D_{n-1}+\beta$，α，β为常量．此时，由D_1、D_2的值，预测D_n的表示式，再用数学归纳法证明．2) $D_n=aD_{n-1}+b$，$D_n=cD_{n-1}+d$，a，b，c，d为常量，$a\neq c$，解得$D_n=(ad-bc)/(a-c)$．3) $D_n=pD_{n-1}+$ $+qD_{n-2}$，$n>2$，其中p，q不依赖于n，且$q\neq 0$．设α，β是$x^2-px-q=0$的根，则$p=\alpha+\beta$，$q=\alpha\beta$．以此代入递推式，得$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$，从而有

$$\begin{cases}D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})\\D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})\end{cases},$$

$$\begin{cases}D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)\\D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1)\end{cases}.$$

方法3 加边法

例16 计算n阶行列式 $D=\begin{vmatrix}0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n\\a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n\\\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0\end{vmatrix}$，

其中$a_1a_2\cdots a_n\neq 0$．

解 将D添加一行一列，并使其值不变，

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ 0 & a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

将第 1 行的-1倍分别加到第2，3，…，$n+1$行，得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

将这个$n+1$阶行列式再加边成$n+2$阶行 列式，并使其值不变，

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & -1 & \cdots & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

将第 1 列的-1倍分别加到第3，4，…，$n+2$列，得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

分别将第3，4，…，$n+2$列的$(1/2)$倍都加到第1列，再将第3，4，…，$n+2$列分别乘以$-(1/2a_1)$，$-(1/2a_2)$，…，$-(1/2a_n)$都加到第2列，得

$$D=\begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i & 1-\frac{n}{2} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

$$=(-2)^n a_1 a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i & 1-\frac{n}{2} \end{vmatrix}$$

$$=(-2)^{n-2}a_1a_2\cdots a_n\left[(2-n)^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{a_i}\right].$$

说明 本例用了两次加边，充分说明，有时把行列式的阶数增高反而容易求出行列式的值。

方法4 拆项法

例17 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}(n>2).$$

解1 将D关于第1列拆成两个行列式之和，再将这两个行列式按第2列拆成$2^2=4$个行列式之和，如此继续下去，得到2^n个行列式，这些行列式中，每个行列式都至少有两列相同或两列成比例，其值均为0，因此，D＝0．

解2 $D=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=0.$

解 3 第i列与第j列分别减去第1列，得

$$D=\begin{vmatrix} \cdots & b_i-b_1 & \cdots & b_j-b_1 & \cdots \\ \cdots & b_i-b_1 & \cdots & b_j-b_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_i-b_1 & \cdots & b_j-b_1 & \cdots \end{vmatrix}=0.$$

说明 1）本例的三种解法中，解1，即拆项法，最容易想到；2）例15中已用了拆项法，而且那里的方法更常用到。

方法 5 提因子法

例18 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}.$

解 首先，将D的第2，3，4列都加到第1列上，可以看出，D有因式$x+y+z$；其次，将D的第2列加到第1列而后减去第3，4列，可以看出，D有因式$y+z-x$；再次，将D的第3列加到第1列而后再减去第2，4列，可以看出，D有因式$x-y+z$；最后，将D的第4列加到第1列后再减去第2，3列，可以看出，D有因式$x+y-z$。由多元多项式的理论知，D能被这四个因式的乘积整除。但是，D中含有z^4的项，且系数为1，因此 $D=-(x+y+z)(y+z-x)(x-y+z)(x+y-z)$.

例19 计算n阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}.$

解 1 第1行的-1倍依次加到第2，3，…，n行，得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-(n-1) \end{vmatrix}$$

$$=(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))$$

解 2 当$x=1$时，D的第1，2列成比例，值为0，从而D有因式$x-1$。同理，D有因式$x-2$，$x-3$，…，$x-(n-1)$。由于这$n-1$个因式两两互素，所以它们的积整除D。但是，D的展开式中最高次项x^{n-1}的系数为1，因此，

$$D=(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))$$

说明 本例的解2是提因子法，可以类似地解决一类这样的题目。

方法6 归纳法

例20 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

解 $D_1=|\cos\alpha|=\cos\alpha$,

$$D_2=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 \\ 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=2\cos^2\alpha-1=\cos2\alpha.$$

下面用数学归纳法证明：$D_n=\cos n\alpha$。

设一切小于n的情况成立，研究D_n。对于D_n，按最后一行展开，得到

$$D_n=2\cos\alpha D_{n-1}-D_{n-2}$$
$$=2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha-\cos(n-2)\alpha=\cos n\alpha.$$

四 用克兰姆规则解线性方程组

只能解n个未知量n个方程的线性方程组。对于这样的方程组，先计算系数行列式D，当$D\neq0$时，再计算D_j，而后再求解；当$D=0$时，不适用。

例21 用克兰姆规则解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\ x_1-3x_2-6x_4=9\\ 2x_2-x_3+2x_4=-5\\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0.\end{cases}$$

解　方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}=27\neq0.$$

再计算

$$D_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27,\quad D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27.$$

根据克兰姆规则，方程有唯一解：$x_1=D_1/D=3$，$x_2=D_2/D=-4$，$x_3=D_3/D=-1$，$x_4=D_4/D=1$。

Ⅰ　证明题

一　有关排列的证明

这类证明题目主要考虑逆序数、对换、奇偶性。

例1　证明：$\tau(x_1x_2\cdots x_n)=\frac{1}{2}n(n-1)-\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)$.

证明　因为，$x_1,x_2,\cdots,x_n$中任意两个不同的x_i与x_j必定在排列$x_1x_2\cdots x_n$或$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$中构成逆序，而且只能在其中的一个构成逆序，所以，这两个排列逆序数的和等于$c_n^2=$

$n(n-)/2$。因此结论成立。

例 2 证明：任意n元排列$x_1x_2\cdots x_n$，一定可以经过不超过n次的对换变为n元排列$12\cdots n$。

证明 对n用数学归纳法。

当$n=1$时，结论显然成立。假设对$n-1$元排列结论成立，考虑n元排列$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$。若$x_n=n$，则$x_1x_2\cdots x_{n-1}$是1，2，$\cdots,n-1$的一个$n-1$元排列，由归纳假设，经不多于$n-1$次对换，$x_1x_2\cdots x_{n-1}$变为$12\cdots(n-1)$，从而，经不多于n次（实际是不多于$n-1$次）对换，$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$变为$12\cdots(n-1)n$。结论成立。若$x_n\neq n$，设$x_i=n$（$i<n$），则可先对$x_1\cdots x_i\cdots x_{n-1}x_n$进行对换$(x_i, x_n)$，得到$x_1\cdots x_n\cdots x_{n-1}n$，化为已证的情况。结论也成立。根据数学归纳法原理，结论得证。

二 用行列式定义进行的证明

这类证明题目要通过行列式的定义来证明；甚至只能通过行列式的定义来证明，别无途径。

例 3 证明：若n阶行列式D中等于零的元素的个数多于n^2-n，则D＝0。

证明 因为，D共有n^2个元素，又，D中等于零的元素的个数多于n^2-n，所以，D中不等于零的元素的个数少于$n^2-(n^2-n)=n$。根据行列式的定义，行列式的每一项为不同行不同列的n个元素的积，所以，D的每一项中至少有一个因子为零，因此，D＝0。

例 4 设有两个行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中$b\neq 0$，证明$D_1=D_2$。

证明 按照行列式的定义，

$$D_1=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

$$D_2=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}(a_{1j_1}b^{1-j_1})(a_{2j_2}b^{2-j_2})\cdots(a_{nj_n}b^{n-j_n}).$$

而$(a_{1j_1}b^{1-j_1})(a_{2j_2}b^{2-j_2})\cdots(a_{nj_n}b^{n-j_n})=a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}b^{(1+2+\cdots+n)-(j_1+j_2+\cdots+j_n)}=a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}b^0=a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，所以，$D_1=D_2$。

例5 证明：若三阶行列式D的所有元素均等于±1，则$|D|\leqslant 4$。

证明 首先，D的展开式共有6项，而每一项的绝对值均等于1，所以$|D|\leqslant 6$。其次，由于D的一行加于另一行后，得出一全为偶数的行，所以D是偶数。因此，只要证明$D\neq\pm 6$。

先证明$D\neq 6$，由于3阶行列式D的展开式共有六项：

$$a_{11}a_{22}a_{33},\quad a_{12}a_{23}a_{31},\quad a_{13}a_{21}a_{32}$$

和 $\quad -a_{11}a_{23}a_{32},\quad -a_{12}a_{21}a_{33},\quad -a_{13}a_{22}a_{31},$

所以，若$D=6$，则这六项全等于1，从而，前三项的乘积与后三项的乘积均等于1，即

$$(a_{11}a_{22}a_{33})\cdot(a_{12}a_{23}a_{31})\cdot(a_{13}a_{21}a_{32})=1,$$

$$(-a_{11}a_{23}a_{32})\cdot(-a_{12}a_{21}a_{33})\cdot(-a_{13}a_{22}a_{31})=1,$$

引出矛盾。因此，$D\neq 6$。

同样可证$D\neq -6$，故得$|D|\leqslant 4$。

三 用行列式性质进行的证明

这类证明题目主要是行列式值的表达式。一般要反复应用行列式的各种性质，才能给出证明。

例6 证明$2n$阶行列式

$$
D_{2n}=\begin{vmatrix}
a & 0 & \cdots & 0 & b \\
0 & a & \cdots & b & 0 \\
 & \ddots & & \iddots & \\
\cdots\cdots & a & b & \cdots\cdots & \\
\cdots\cdots & b & a & \cdots\cdots & \\
 & \iddots & & \ddots & \\
0 & b & \cdots\cdots & a & 0 \\
b & 0 & \cdots\cdots & 0 & a
\end{vmatrix}=(a^2-b^2)^n.
$$

证明1 根据拉普拉斯定理，对D_{2n}按第1，$2n$行展开，得

$$
D_{2n}=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} D_{2(n-1)}.
$$

再根据拉普拉斯定理，对$D_{2(n-1)}$按第1，$2(n-1)$行展开，得

$$
D_{2n}=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}^2 D_{2(n-1)}.
$$

如此继续下去，便得

$$
D_{2n}=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}^n=(a^2-b^2)^n.
$$

证明2 将D_{2n}的第$2n$列加到第1列上，第$2n-1$列加到第2列上，…，第$n+1$列加到第n列上，而后分别从第1，2，…，n列中提出$a+b$，得

$$
D_{2n}=(a+b)^n\begin{vmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & b \\
0 & 1 & \cdots & b & 0 \\
 & \ddots & & \iddots & \\
\cdots\cdots & 1 & b & \cdots\cdots & \\
\cdots\cdots & 1 & a & \cdots\cdots & \\
 & \iddots & & \ddots & \\
0 & 1 & \cdots & a & \\
1 & 0 & \cdots & 0 & a
\end{vmatrix}
$$

将第1，2，…，n列都乘以$-b$，而后分别加到第$2n$，$2n-1$，…，$n+1$列上，得

$$D_{2n}=(a+b)^n\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & & ⋰ & \\ \cdots & \cdots\cdots 1 & 0\cdots\cdots & & \cdots \\ \cdots & \cdots\cdots 1 & a-b\cdots\cdots & & \cdots \\ & ⋰ & & \ddots & \\ 0 & 1 & \cdots & a-b & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b)^n(a-b)^n=(a^2-b^2)^n.$$

说明 1）本例也可以如下证明：当$a\neq 0$且$b\neq 0$时，从D_2n的前n行提a，后n行提b；而后，将第1，2，…，n列分别乘以$(-b/a)$，再分别加到第$2n$，$2n-1$，…，$n+1$列上。当$a=0$或$b=0$时易证；2)本例 说 明，同一个题目可以有多种证法；3）本例的D_{2n}，若主对角线元素顺次写为a_1，a_2，…，a_{2n}，副对角线元素顺次写为$b_1,b_2,\cdots,b_{2n}$，则行列式将 等于$\prod_{i=1}^{n}(a_ia_{2n+1-i}-$
$-b_ib_{2n+1-i})$。

例7 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

A_{kj}是D中a_{kj}的代数余子式，求证

1）$$\begin{vmatrix} a_{11}+x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ a_{21}+x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix}=D+\sum_{j=1}^{n}\left(x_j\sum_{k=1}^{n}A_{kj}\right);$$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{21} & a_{32}-a_{22} & \cdots & a_{3n}-a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n-1,1} & a_{n2}-a_{n-1,2} & \cdots & a_{nn}-a_{n-1,n} \end{vmatrix} = \sum_{k,j=1}^{n} A_{kj}$;

3) $\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix} = \sum_{k,j=1}^{n} A_{kj}$;

4) $\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = D + x\sum_{k,j=1}^{n} A_{kj}$.

证明　1 ）将左端的行列式按第 1 列拆开，得

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ a_{21}+x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ a_{21} & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix}$$

上式右端第二个行列式为

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= x_1 \sum_{k=1}^{n} A_{k1},$$

再将上式右端第一个行列式按第2列拆开，这样继续作下去，最后得

$$\text{原式}=D+x_1\sum_{k=1}^{n}A_{k1}+x_2\sum_{k=1}^{n}A_{k2}+\cdots+x_n\sum_{k=1}^{n}A_{kn}$$

$$=D+\sum_{j=1}^{n}\left(x_j\sum_{k=1}^{n}A_{kj}\right)$$

2）将左端的行列式中第1，2，…，$n-1$行都加到第n行上去，再将第1，2，…，$n-2$行都加到第$n-1$行上去，这样依次作下去，最后将第1行加到第2行上去，且将第1行元素“1”改写成$a_{1j}+(1-a_{1j})$的形式，而后用1）的结果，得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{21} & a_{12}-a_{22} & \cdots & a_{3n}-a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n-1,1} & a_{n2}-a_{n-1,2} & \cdots & a_{nn}-a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}+(1-a_{11}) & a_{12}+(1-a_{12}) & \cdots & a_{1n}+(1-a_{1n}) \\ a_{21}+(1-a_{11}) & a_{22}+(1-a_{12}) & \cdots & a_{2n}+(1-a_{1n}) \\ a_{31}+(1-a_{11}) & a_{32}+(1-a_{12}) & \cdots & a_{3n}+(1-a_{1n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+(1-a_{11}) & a_{n2}+(1-a_{12}) & \cdots & a_{nn}+(1-a_{1n}) \end{vmatrix}$$

$$=D+\sum_{k=1}^{n}(1-a_{1j})\sum_{k=1}^{n}A_{kj}$$

$$=D+\sum_{k,j=1}^{n}A_{kj}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{kj}=\sum_{k,j=1}^{n}A_{kj}.$$

3）同2）可证，从略.

4）在1）中，令$x_i=x(i=1，2，\cdots，n)$,即得.

例8　求证n阶循环行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}=f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n),$$

其中$f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$，$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为所有的$n$次单位根。

证明 取$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$，且设

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \cdots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}$$

则 $D\cdot d=$

$$\begin{vmatrix} a_1+\cdots+a_n & a_1+a_2\varepsilon+\cdots+a_n\varepsilon^{n-1} & \cdots & a_1+a_2\varepsilon^{n-1}+\cdots+a_n\varepsilon^{(n-1)^2} \\ a_1+\cdots+a_n & \varepsilon(a_1+a_2\varepsilon+\cdots+a_n\varepsilon^{n-1}) & \cdots & \varepsilon^{n-1}(a_1+a_2\varepsilon^{n-1}+\cdots+a_n\varepsilon^{(n-1)^2}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_1+\cdots+a_n & \varepsilon^{n-1}(a_1+a_2\varepsilon+\cdots+a_n\varepsilon^{n-1}) & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2}(a_1+a_2\varepsilon^{n-1}+\cdots+a_n\varepsilon^{(n-1)^2}) \end{vmatrix}$$

$$=f(1)f(\varepsilon)f(\varepsilon^2)\cdots f(\varepsilon^{n-1})\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \cdots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}$$

即 $D\cdot d=f(1)f(\varepsilon)f(\varepsilon^2)\cdots f(\varepsilon^{n-1})\cdot d$ (*)

因为，ε为n次本原单位根，所以$\varepsilon^i\neq\varepsilon^j$，$i\neq j$，从而，1，

ε，ε^2，…，ε^{n-1}是n个互不相同的n次单位根，因此，$d\neq 0$。从(*)两端消去d，得到

$$D=f(1)f(\varepsilon)f(\varepsilon^2)\cdots f(\varepsilon^{n-1})=f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n).$$

说明 1）本例将F上的D看作C上的D来处理；2）本例中辅助行列式d的选取是关键。

例 9 若$n(n\geqslant 3)$阶行列式D的元素为±1，证明 $|D|\leqslant (n-1)((n-1)!)$。

证明 对D的阶数n用数学归纳法。当$n=3$时，由例5得，$|D|\leqslant 4=(3-1)((3-1)!)$，结论成立。设 $n-1$时结论成立，考虑n阶行列式D。对D按任一行展开，再由条件及归纳假设，就得

$$\begin{aligned}|D|&=|a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}|\\&=|\pm M_{i1}\pm M_{i2}\pm\cdots\pm M_{in}|\\&\leqslant |M_{i1}|+|M_{i2}|+\cdots+|M_{in}|\\&\leqslant n[(n-2)((n-2)!)]<(n-1)((n-1)!).\end{aligned}$$

即，对于n阶行列式结论也成立。根据数学归纳法原理，结论成立。

说明 本例是一个不等式。

例10 设b，a_0，a_1，…，a_n是$n+2$个互不相同的数，$a_0\neq 0$，并且

$$f(x)=\begin{vmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_0 & x & a_2 & \cdots & a_n\\ a_0 & a_1 & x & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x\end{vmatrix}.$$

证明$(x-b,\ f(x))=1$。

证明 根据行列式的性质，得到$f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0$，从而$x-a_1$，$x-a_2$，…，$x-a_n$均整除$f(x)$。由于$a_1,a_2$，…，$a_n$是互不相同的$n$个数，所以$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$整

除$f(x)$。根据行列式的定义，$f(x)$的首项为a_0x^n，所以$f(x)=$
$=a_0(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$。因为，$b$与$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$不同，所以，$b$不是$f(x)$的根，从而$x-b$不整除$f(x)$。再由$x-b$是不可约多项式得，$(x-b, f(x))=1$。

说明 本例是一个与多项式相联系的问题。

四 有关克兰姆规则的证明

这类证明题目直接用克兰姆规则证明，或者用克兰姆规则的思考方法证明。

例11 设a_1，a_2，$\cdots$，a_n是数域F中互不相同的数，b_1，b_2，$\cdots$，b_n是F中任意一组给定的数，证明存在唯一的数域F上的多项式$f(x)$，使得$f(a_i)=b_i$，$i=1$，2，$\cdots$，n，且$\deg(f(x))<n$。

证明 考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2+\cdots+a_1^{n-1}x_n=b_1 \\ x_1+a_2x_2+\cdots+a_2^{n-1}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1+a_nx_2+\cdots+a_n^{n-1}x_n=b_n \end{cases}$$

因为，系数行列式D是一个由a_1，a_2，$\cdots$，a_n组成的范德蒙行列式，而且a_1，a_2，$\cdots$，a_n互不相同，所以，$D\neq 0$，从而，由克兰姆规则知，方程组有唯一解。设其解为$x_1=c_0$，$x_2=c_1$，$\cdots$，$x_n=c_{n-1}$，则多项式$f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$即为所求，因为，显然，$\deg(f(x))<n$，且$f(a_i)=b_i$，$i=1$，$2$，$\cdots$，$n$。又因为该方程组的解唯一，所以这样的多项式也是唯一的。

例12 设a，b，c，d是不全为零的实数，证明方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \\ bx_1-ax_2+dx_3-cx_4=0 \\ cx_1-dx_2-ax_3+bx_4=0 \\ dx_1+cx_2-bx_3-ax_4=0 \end{cases}$$

只有零解。

证明 根据克兰姆规则，只需证明系数行列式$D\neq 0$。

因为，
$$D^2=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix}$$

$=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$，

又，a，b，c，d是不全为零的实数，所以，$D\neq 0$。

例13 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$，

证明 $(a_{11}f_1(x)+a_{12}f_2(x)+\cdots+a_{1n}f_n(x)$，$a_{21}f_1(x)+$ $+a_{22}f_2(x)+\cdots+a_{2n}f_n(x)$，$\cdots$，$a_{n1}f_1(x)+a_{n2}f_2(x)+\cdots$ $+a_{nn}f_n(x))=(f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_n(x))$。

证明 设

$$\begin{cases} a_{11}f_1(x)+a_{12}f_2(x)+\cdots+a_{1n}f_n(x)=g_1(x) \\ a_{21}f_1(x)+a_{22}f_2(x)+\cdots+a_{2n}f_n(x)=g_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}f_1(x)+a_{n2}f_2(x)+\cdots+a_{nn}f_n(x)=g_n(x) \end{cases}，$$

则仿克兰姆规则的证明过程，可得

$$f_1(x)=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} g_1(x) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ g_2(x) & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n(x) & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{D}A_{11}g_1(x)+\frac{1}{D}A_{21}g_2(x)+\cdots+\frac{1}{D}A_{n1}g_n(x)$$

从而，$f_1(x)$是$g_1(x)$，$g_2(x)$，…，$g_n(x)$的组合．同样$f_2(x)$，…，$f_n(x)$也都是$g_1(x)$，$g_2(x)$，…，$g_n(x)$的组合．由整除的性质知，$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$的公因式与$g_1(x)$，$g_2(x)$，…，$g_n(x)$的公因式相同．再由最大公因式的定义知，结论成立．

§5 补充资料

Ⅰ 行列式的其它定义方法

一 归纳定义法

1 阶行列式：$|a_{11}|=a_{11}$．

2 阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum\limits_{j=1}^{2}a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$，

$$M_{11}=|a_{22}|，\ M_{12}=|a_{21}|．$$

假设$n-1$阶行列式已经定义，则可以用$n-1$阶行列式定义n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j},$$

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \cdots,M_{1n}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

二 置换定义法

把一个n级排列变为另一个n级排列的变换称为一个n级置换，记为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

即在每个码之下写出它要变成的数码。

一个置换A可以用不同的记法，只要每个数码与它所要变成的数码上下对正就行了，如

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1&3&2\\4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

一个置换A，当其上下两排列奇偶性相同时称为偶置换；相反时称为奇置换。

一个置换A，当其上下两排列的逆序数之和为偶数时，则为偶置换，为奇数时则为奇置换。当$n>1$时，n级置换共有$n!$个，其中奇、偶置换各占一半。

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum\pm a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

称为一个n阶行列式。共有$n!$项，每项为不同行不同列的n个元素的乘积，而当置换$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\j_1&j_2&\cdots&j_n\end{pmatrix}$为偶置换时，此项加正号，为奇置换时加负号。

三　公理化定义法

近代还有用公理化方法定义行列式的。如采用多重线性函数的概念来定义，但是，要求的预备知识较多，不易接受，对于初学者来说，比我们所采用的排列定义法，难度要大得多。

行列式的定义。从全体n阶矩阵的线性空间到复数域$\mathbf{C}$的函数　$\det: M(n, n, \mathbf{C})\to\mathbf{C}$,

$$A=(a_1, \cdots, a_n)\to\det A=\det(a_1, \cdots, a_n),$$

满足如下三个公理时，称为行列式。

公理1（n重线性性）det视为任意列a_i的函数时是线性映射，即　1）　$\det(a_1, \cdots, a_i+b_i, \cdots, a_n)$

$=\det(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n)+\det(a_1, \cdots, b_i, \cdots, a_n)$

2） $\det(a_1, \cdots, ca_i, \cdots, a_n)$

$=c\det(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$，$c\in \mathbf{C}$.

公理2（交错性）若A的两行相同，则$\det A=0$.

公理3（规范化条件）对于单位矩阵E_n，$\det E_n=1$.

Ⅱ 历史资料点滴

最早引入行列式概念的，是十七世纪日本数学的奠基人关孝和，他在1683年发表的《解伏题之法》一书中，对于行列式及其展开已经有了清楚的叙述.

行列式概念在欧洲最早见于莱布尼兹的著作（1693年），拉格朗日和拉普拉斯也曾研究过这个课题，通常认为它溯源于柯西（1812年）．关于这一理论最系统的叙述则是雅可比的《论行列式的形成与性质》（1841年）一书.

1693年莱布尼兹用指标数的系统集合，表示含两个未知量x与y的三个线性方程所组成的系数系统．他从三个线性方程的系统中消去两个未知量，得到一个行列式，现在称为方程组的结式.

用行列式的方法解含二个、三个和四个未知量的联立方程可能在1729年由马克劳林开创，且于1748年发表他的遗作《代数论著》中，其法则就是现在所使用的法则.

克兰姆于1750年把马克劳林的法则发表在他的《线性代数分析导言》中，他的行列式和现在一样，是一些乘积的和，每一乘积的符号是这样确定的，即从标准次序出发，得到这些元素的排列所需的重排数，当该数是偶数时带正号，否则就带负号.

1764年法国数学家培祖把确定行列式每一项的符号系统化了．他给出了含n个未知量的n个方程组成的齐次线性方程组，证明了系数行列式等于零是这个方程组有非零解的条件．他还得出了行列式按一行（列）展开的法则.

范德蒙脱离开线性方程组，独立地对行列式理论作系统研

究，给出行列式的定义与确定项的符号的法则，获得了按若干行展开的部分法则，被认为是行列式理论的奠基人。

参照克兰姆和培祖的工作，拉普拉斯在1722年的论文《对积分和世界体系的探讨》中，证明了范德蒙的一些规则，推广了展开行列式的方法，得到了现在的拉普拉斯定理。

行列式一词是柯西给出的，现在的行列式的两条竖线的记号是他于1841年引进的。他的著作给出了行列式的第一个系统的、几乎是近代的处理。他的主结果之一是行列式的乘法规则（虽然拉格朗日已经对三阶行列式给出了这个规则，但因为他的行列式的行是一个四面体的顶点坐标，未被引向普遍化）。他还改进了拉普拉斯定理，并给了一个证明。

1825年Heinrich F. Scherk 在他的《数学 论文》中给出了行列式的几个新的性质，如三角形行列式等。

1877年G. W. Hill 公布关于月球理论方面的重要论文时，对无穷阶行列式的应用很多。

当行列式的元素是t的函数时，其导数公式首先由雅 可比于1841年给出。

1925年，F. Schweins 在公布的著作中有繁行列式的重要结论，由于符号繁杂而未为人们所注意，后来，为Dyluester, Kronecker 及其它人重新发现。

行列式的数值性质，原始除式的理论，创立较晚，为H. J. D. Dmith, Weierstrass, Kronecker, Frobenius 所研究。

T. Muir 关于行列式的书，论述了截至1841年的理论，完全精细，是行列式的第一部巨典。

§6 基本习题

1 对于任意的k，$0\leqslant k\leqslant c_n^2$，$n\geqslant 2$，证明：存在逆序数为$k$的$n$级排列。

2 计算$\tau(369\cdots(3n)147\cdots(3n-2)258\cdots(3n-1))$。

3 若n阶行列式D有k行和h列的交点处的元素全为0，且$k+h>n$，证明$D=0$。

4 设a_{ij}是整数，$i, j=1, 2, \cdots, n$，证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}-\frac{1}{2} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\frac{1}{2} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\frac{1}{2} \end{vmatrix}\neq 0.$$

5 计算

1）$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & -n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -2 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；2）$D=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a_n \end{vmatrix}(a_i\neq 0)$.

6 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

7 计算

1) $D_n=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$;

2) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$ $(a_i\neq 0)$.

8　设$f(x)=\begin{vmatrix} g_1(x) & g_1(x^2) & \cdots & g_1(x^n) \\ g_2(x) & g_2(x^2) & \cdots & g_2(x^n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n(x) & g_n(x^2) & \cdots & g_n(x^n) \end{vmatrix}$.　$(n>1)$

证明$f(x)=0$或$f(x)$在复数域上可约。

9　设$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$是次数不超过$n-2$的多项式，a_1，a_2，…，a_n是任意数，$n>1$，求证

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}=0.$$

10　证明线性方程组

$$\begin{cases} \qquad x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n=1 \\ x_1 \qquad +x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n=2 \\ x_1+x_2 \qquad +\cdots+x_{n-1}+x_n=3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1} \qquad =n \end{cases}$$

的解是$x_i=\dfrac{n(3-n)}{2(n-1)}+n-i$，$i=1$，$2$，…，$n$.

第三章　线性方程组

§1　概括说明

线性方程组的理论在线性代数中的地位是突出的，它不仅是线性代数的最基本的内容，而且也是线性代数的理论基础。后面一些章节的许多问题都要归结为线性方程组的问题。同时，在数学的许多分支及其它许多领域中，线性方程组也有广泛的应用。

关于线性方程组的各种问题，本章得到了圆满的解答，所得到的结果是十分完美的。在研究问题的方法与模式上，有启发作用。本章除了应用行列式这一工具外，还引进了向量和矩阵两种工具。本章所论述的概念、结论、方法，都是基本的，在整个线性代数中起着十分重要的作用，将要经常用到。

本章的内容分为四个部分： 高斯消元法，线性方程组与矩阵；n维（数）向量及其线性相关性，矩阵的秩；线性方程组相容性定理，线性方程组解的结构，线性方程组的解法；二元高次方程组。

高斯消元法是中学数学中所讲述的消元法的发展，其基本思想是：逐次地把方程组中的一部分方程变为含未知量较少的方程，从而将方程组化为阶梯形的规范形式，并且按一定程序进行。高斯消元法不仅给出了实用的计算方法，而且可以建立方程组有解的判定定理。

对于线性方程组施行同解变换，主要就是对系数和常数项进行运算，因此，可以略去未知量而只把方程的系数和常数项分离出来排成一个表，用这个表代替方程组，这种表就是矩阵。于是，线性方程组和矩阵可以建立一一对应关系。由方程组的三种同解变换引入矩阵的初等变换。解线性方程组就可以在矩阵上得

以实现。

向量概念自身就是线性代数的最重要的研究对象之一。本章引入n维（数）向量的概念，定义向量的线性运算，研究线性相关性。n维向量的线性相关性是关键内容，这是因为：一方面，这是解决本章问题所必须的；另一方面，这也是对后面线性空间一章中难点的分散。

对于矩阵的秩，本章主要是给出两种定义方法，即向量定义法和行列式定义法，进一步的研究将在矩阵一章中进行。

线性方程组的相容性定理与线性方程组的解的结构组成线性方程组的基本理论，是本章的中心内容。解的结构问题就是用有限个解来刻划无限个解的问题，是一个深刻的思想方法。线性方程组的解法，本质上就是两种：克兰姆规则和高斯消元法。

二元高次方程组的解法，基本思想是消元。本章给出了理论及具体解法，在推导过程中应用了线性方程组的理论。

本章的补充资料是：非齐次线性方程组的基础解系，线性方程组的近似解法，主元素消去法，历史资料点滴。

§2　内容提要

Ⅰ　高斯消元法

一　线性方程组

形如
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases} \quad (1)$$
的方程组称为数域F上的一个n元线性方程组，其中$a_{ij}\in$ F，$i=1,2,\cdots,s$，$j=1,2,\cdots,n$，称为系数；$b_i\in$ F，$i=1,2,\cdots,s$，称为常数项；x_1，x_2，$\cdots$，x_n是文字，称为未知量。

设有数域F上的有序数组$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$。若将$x_1,x_2,\cdots,x_n$依次用$k_1,k_2,\cdots,k_n$代入，使得(1)中的每个方程均成为数域F上

的等式，则称（k_1，k_2，…，k_n）为方程组(1)的一个解．方程组的解的全体，称为它的解集合．若两个n元线性方程组的解集合相等，则称这两个方程组同解．

称下面的三种变换为线性方程组的初等变换：1）用一个非零的数乘以某一个方程；2）把一个方程的倍数加到另一个方程；3）互换两个方程的位置．

定理．初等变换把线性方程组变为同解的线性方程组．

初等变换是解线性方程组的基本方法和基本步骤．

讨论线性方程组，要解决下面四个问题：1）线性方程组是否有解，找出有解的必要充分条件；2）有解时解的个数；3）有解时怎样求解；4）当解不止一个时，解之间的关系．

二　矩阵

实际上，给定数域F上的一个由s个方程组成的n元线性方程组，就是给定F上的$s\times(n+1)$个数，且这些数依一定的次序排为一个矩形的表．至于未知量用什么文字表示，是无关紧要的．对线性方程组施行初等变换，就是对其系数、常数项进行运算．于是，就引入矩阵的概念．

由数域F上的$s\times m$个数排成的s行m列的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sm} \end{pmatrix}$$

称为数域F上的一个$s\times m$矩阵，简记为$(a_{ij})_{s\times m}$，a_{ij}称为矩阵的元素，i称为a_{ij}的行指标，j称为a_{ij}的列指标．$n\times n$矩阵称为n阶矩阵．

矩阵 $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

分别称为线性方程组(1)的系数矩阵、增广矩阵，常记为A、$\overline{A}$。

（1）与$\overline{A}$的对应是线性方程组与矩阵之间的一一对应。给定数域F上的一个线性方程组当且仅当给定F上的一个矩阵。

矩阵不仅是重要的工具，而且是重要的研究对象，就一定意义来说，矩阵成为线性代数学的研究中心，因此，线性代数又称为“矩阵论”。

三　高斯消元法

定义．若线性方程组(1)的系数适合条件：1）$a_{ij}=0$，对所有$i>j$；2）对于任意$i=1,2,\cdots,s$，当$a_{i1}=\cdots=a_{i,j-1}=0$，$a_{ij}\neq 0$时，从第$i+1$个方程至第$s$个方程的$x_1,x_2,\cdots,x_j$的系数均为0；3）对于任意的$i=1,2,\cdots,s$，当$a_{i1}=\cdots=a_{in}=b_i=0$时，从第$i+1$个方程至第$s$个方程的系数及常数项均为0，则称这样的方程组为阶梯形方程组．

引理．设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b_2' \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a'_{s2}x_2+\cdots+a'_{sn}x_n=b_s' \end{cases} \tag{2}$$

其中 $a_{11}\neq 0, a'_{ij}=a_{ij}-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}$，$i=2,\cdots,s$，$j=2,\cdots,n$，

$$\begin{cases} a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{s2}x_2+\cdots+a'_{sn}x_n=b'_s \end{cases} \tag{3}$$

则(1)有解当且仅当(3)有解．

定理．设有s个方程n个未知量的线性方程组(1)，则可以经过初等变换将(1)化为一个阶梯形方程组，记为(4)．若(4)中未知量的系数不全为零的方程的个数是r，则有：(1)有解⇔(4)中有$s-r$个$0=0$的等式．当有解时，若$r=n$，则有唯一解；若

$r<n$，则有无穷多个解。

步骤。第一步，化阶梯形方程组：若(1)中x_1的系数全为0，则考虑x_2的系数；若x_1的系数不全为0，则可经初等变换3），使第1个方程的x_1的系数不为0，即$a_{11}\neq 0$。经初等变换2），把(1)化为(2)。然后，对于(3)同样进行。如此下去。第二步，回代过程：由最后一个方程，求得一个未知量，再依次向前回代，逐个地求出一切未知量。

例子。见§4，Ⅰ，一。

定理。在齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_2+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$$

中，若$s<n$，则它必有非零解。

四　加强的阶梯形矩阵

称下面的三种变换为矩阵的初等行变换：1）一行乘以一个非零的数；2）一行的倍数加于另一行；3）交换两行的位置。类似地，有矩阵的初等列变换。统称为矩阵的初等变换。

若矩阵$(a_{ij})_{sn}$的元素适合条件：1）$a_{ij}=0$，对所有的$i>j$；2）对于任意$i=1,2,\cdots,s$，当$a_{i1}=\cdots=a_{i,j-1}=0$，$a_{ij}\neq 0$时，从第$i+1$行至第$s$行的第1列至第$j$列的元素全为零；3）对于任意的零行，其下没有非零行，则称这样的矩阵是阶梯形矩阵。

在$s\times n$的阶梯形矩阵中，若对于任意的$i=1,2,\cdots,s$，当有$a_{i1}=\cdots=a_{i,j-1}=0$，$a_{ij}\neq 0$时，就有$a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{i-1,j}=0$，并且该$a_{ij}=1$，则称该阶梯形矩阵为加强的阶梯形矩阵（行简化阶梯形矩阵）。

定理。任意矩阵都可以经过初等行变换化为加强的阶梯形矩

阵.

高斯消元法反映在线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$上，就是用初等行变换将$\overline{A}$化为阶梯形矩阵，同时将系数矩阵A化为加强的阶梯形矩阵.

Ⅱ　向量的线性相关性、矩阵的秩

一　n维向量及其线性运算

数域F中的n个数组成的有序数组（$a_1,a_2,\cdots,a_n$）称为数域F上的一个n维向量，常用小写字母α，β，γ，…表示. 其中a_i称为该向量的第i个分量.

若n维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$与$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$的对应分量都相等，即$a_i=b_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则称这两个向量相等，记为$\alpha=\beta$.

设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$与$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是数域F上的两个$n$维向量，$k$是数域F中的一个数，则

α与β的和为：$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$；

k与α的数量乘积为：$k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$.

分量全为0的向量（0，0，…，0）称为零向量，记为0.

向量$(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$称为向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的负向量，记为$-\alpha$.

设α，β，γ是数域F上的任意n维向量，k，l是数域F中的任意数，则有

1）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$，　　2）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$，

3）$\alpha+0=\alpha$，　　4）$\alpha+(-\alpha)=0$，

5）$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$，　　6）$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$，

7）$k(l\alpha)=(kl)\alpha$，　　8）$1\alpha=\alpha$.

数域F上的n维向量的全体，同时考虑到定义在它们上面的线性运算（加法与数量乘法），称为数域F上的n维向量空间，记为F^n.

对于任意的α，β，α_1，α_2，…，$\alpha_s\in F^n$及任意的k，l，k_1，

$k_2,\cdots, k_s\in \mathbf{F}$，有

1）方程$x+\beta=\alpha$在$\mathbf{F}^n$中有且仅有一解$x=\alpha+(-\beta)$，称$\alpha+(-\beta)$是α与β的差，记为$\alpha-\beta$，即$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$；

2）$0\alpha=0$，$k0=0$；　　3）$(-k)\alpha=k(-\alpha)=-k\alpha$；

4）$k(\alpha-\beta)=k\alpha-k\beta$，$(k-l)\alpha=k\alpha-l\alpha$；

5）$k\neq 0$，$\alpha\neq 0\Leftrightarrow k\alpha\neq 0$；　　6）$k\alpha=0\Leftrightarrow k=0$或$\alpha=0$；

7）$k(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)=k\alpha_1+k\alpha_2+\cdots+k\alpha_s$；

8）$(k_1+k_2+\cdots+k_s)\alpha=k_1\alpha+k_2\alpha+\cdots+k_s\alpha$.

设$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_s, \beta\in\mathbf{F}^n$．若有$k_1, k_2,\cdots, k_s\in\mathbf{F}$，使得$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$，则称$\beta$是$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_s$的线性组合，或称$\beta$可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_s$线性表出.

设有$\mathbf{F}^n$中的向量$\alpha_i=(a_{i1}, a_{i2},\cdots, a_{in})$，$i=1,2,\cdots,s$，$\beta=(b_1, b_2,\cdots, b_n)$，则$\beta$可以由$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_s$线性表出$\Leftrightarrow$线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{s1}x_s=b_1 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{s2}x_s=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{sn}x_s=b_n \end{cases}$$

有解。

向量$\varepsilon_1=(1, 0, 0,\cdots, 0)$，$\varepsilon_2=(0, 1, 0,\cdots, 0)$，$\cdots$，$\varepsilon_n=(0,0, 0,\cdots,1)$称为$n$维单位向量．任一$n$维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots, a_n)$都可以表为$\varepsilon_1, \varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$的线性组合$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$。

若由n个n维向量$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_n$的分量为行所组成的行列式不为0，则任一个$n$维向量都可以由$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_n$线性表出。

若向量组$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_t$中的每个向量都可以由向量组$\beta_1, \beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出，则称向量组$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_t$可由向量组$\beta_1, \beta_2,\cdots, \beta_s$线性表出。

若向量组α_1，α_2，…，α_t可以由向量组β_1，β_2，…，β_s线性表出，向量组β_1，β_2，…，β_s可以由向量组γ_1，γ_2，…，γ_p线性表出，则向量组α_1，α_2，…，α_t可以由向量组γ_1，γ_2，…，γ_p线性表出。简言之，线性表出具有传递性。

若两个向量组α_1，α_2，…，α_t与β_1，β_2，…，β_s可以互相线性表出，则称它们等价。向量组等价具有反身性、对称性、传递性。

二　向量的线性相关性

设α_1，α_2，…，$\alpha_s\in F^n$。若有不全为零的数k_1，k_2，…，$k_s\in F$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，则称向量组$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_s$线性相关。若向量组$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_s$不线性相关，即$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$仅当$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$时成立，则称向量组$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_s$线性无关。

α线性相关$\Leftrightarrow\alpha=0$。α_1，α_2，…，$\alpha_s(s>1)$线性相关$\Leftrightarrow$存在一个向量可以由其余向量线性表出。α线性无关$\Leftrightarrow\alpha\neq0$。$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_s(s>1)$线性无关$\Leftrightarrow$其中任一向量均不能由其余向量线性表出。

一个向量组的一部分向量所构成的向量组称为该向量组的一个部分组。若一向量组有一个部分组线性相关，则该向量组线性相关。若一向量组线性无关，则它的任一部分组均线性无关。

若一向量组中含有零向量，则该向量组线性相关。若一向量组线性无关，则该向量组中的任一向量均不为零向量。

设有向量组$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$，$i=1,2,\cdots,s$，则$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow$齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{s1}x_s=0\\a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{s2}x_s=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{sn}x_s=0\end{cases}\qquad(5)$$

有非零解．α_1，α_2,…，α_s线性无关⇔齐次线性方程组（5）仅有零解．当$s=n$时，可以根据由分量为行所组成的行列式是否为零来判定．

设有量组$\alpha_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$，$i=1, 2, \cdots, s$．若$\alpha_1$，$\alpha_2$,…，$\alpha_s$ 线性无关，则每个向量均添上 k 个分量后所成的s个$n+k$维向量仍线性无关．若α_1，α_2,…，α_s线性相关，则每个向量均去掉$k(k<n)$个分量后所得的s个 $n-k$ 维向量仍线性相关．

设α_1，α_2,…，α_t与β_1，β_2,…，β_s是两个 向 量 组．若：1）α_1，α_2,…，α_t可以由β_1，β_2,…，β_s线性表出，2）$t>s$，则向量组α_1，α_2,…，α_t必线性相关．

若向量组α_1，α_2,…，α_t可以由向量组β_1，β_2,…，β_s 线性表出，且α_1，α_2,…，α_t线性无关，则$t\leqslant s$．

$n+1$个n维向量必线性相关．

两个线性无关的等价向量组所包含向量的个数必相同．

若α_1，α_2,…，α_t线性无关，又α_1，α_2,…，α_t，β线性相关，则β可由α_1，α_2,…，α_t线性表出．

若α_1，α_2,…，α_t线性无关，β不能由α_1，α_2,…,α_t线性表出，则α_1，α_2,…，α_t，β线性无关．

若α_1，α_2,…，α_t线性无关，β可由α_1，α_2,…，α_t 线性表出，则表示方法唯一．

三　向量组的秩

设有向量组α_1，α_2,…，α_s及其部分组α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_t}．若：1）α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_t}线性无关；2）对于任一α_i，$i=1, 2, \cdots, s$，α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_t}，α_i均线性相关，则称α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_t}是α_1，α_2,…，α_s的一个极大(线性)无关组．

设α_{i_1}，α_{i_2},…，α_{i_t}是α_1，α_2,…，α_s的一个极大无关组，

则α_1，α_2，…，α_s与α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_t}等价.

设有向量组α_1，α_2，…，α_t（$t\geqslant 2$），且$\alpha_1\neq 0$，则α_1，α_2，…，α_t线性无关⇔对于任意的$i=2$，3，…，t，α_i均不能由α_1，α_2，…，α_{i-1}线性表出.

完全由零向量组成的向量组没有极大无关组；若一个向量组中含有非零向量，则该向量组一定有极大无关组.

给定了一个含有非零向量的向量组α_1，α_2，…，α_s，则可以用下述方法求出它的一个极大无关组：设α_{i_1}是α_1，α_2，…，α_s中的第一个非零向量，则考虑部分向量组α_{i_1}，α_{i_1+1}，…，α_s. 保留α_{i_1}，而后从α_{i_1+1}开始逐个检查. 若有某个向量可以被它前面留下来的那些向量线性表出，则把这个向量去掉，否则，就把这个向量留下来. 最后，若留下来的向量是α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_t}，则这些向量就组成一个极大无关组. 例子见§4，I，二.

定理. 以α_1，α_2，…，α_s为列（行），写成一个矩阵，对矩阵实行初等行（列）变换，这种变换保持α_1，α_2，…，α_s间的线性关系不变.

给定了一个含有非零向量的向量组α_1，α_2，…，α_s，根据该定理还可以用下述方法求出它的一个极大无关组：1）以α_1，α_2，…，α_s为列写成矩阵，2）初等行变换化为加强的阶梯形矩阵，3）写出线性关系. 例子见§4，I，二.

根据该定理还可以判定线性相关性.

一个向量组的极大无关组不一定是唯一的. 它的任一个线性无关的部分组都可以扩充成一个极大无关组. 一个向量组的任意两个极大无关组都是等价的，从而所包含向量的个数相等.

向量组的极大无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩；只含零向量的向量组的秩是零. 秩是向量组自身的属性，是唯一确定的.

若向量组（Ⅰ）可以向量组（Ⅱ）线性表出，则（Ⅰ）的秩

≤（Ⅱ）的秩．若两个向量组等价，则它们的秩相等．

若向量组α_1，α_2，…，α_s的秩是t，则α_1，α_2，…，α_s中任意t个线性无关的向量均构成它的一个极大无关组．α_1，α_2，…，α_s线性无关当且仅当它的极大无关组是其自身．

四　矩阵的秩

矩阵的一行可视为一个向量，称为行向量．同样地，一列也可视为一个向量，称为列向量．所有行向量组成矩阵的行向量组，所有列向量组成矩阵的列向量组．

矩阵的行向量组的秩称为矩阵的行秩，矩阵的列向量组的秩称为矩阵的列秩．矩阵A的行秩与列秩相等，称为矩阵A的秩，记为秩（A）．

在$s\times m$矩阵A中，任意取定k行和k列（$k\leqslant min(s, m)$），由位于这些行与列的交点上的k^2个元素按原来的次序组成一个k阶行列式，称为A的一个k阶子式．A的k阶子式有$c_n^k c_m^k$个．当A是n阶矩阵时，用$|A|$表示A的n阶子式，称为A的行列式．

矩阵A的秩$\geqslant r\neq 0\Leftrightarrow$A有一个$r$阶子式不为零；矩阵A的秩$\leqslant r\neq 0\Leftrightarrow$A的一切$r+1$阶子式全为零．

矩阵A的非零子式的最高阶数称为A的秩；当A没有非零子式时，称A的秩为0．

关于矩阵A，下面四条相互等价：1）A的秩是r；2）A的非零子式的最大阶数是r；3）A有一个r阶子式$D\neq 0$，且一切$r+1$阶子式（若有的话）都等于0；4）A有一个r阶子式$D\neq 0$，且包含D的一切$r+1$阶子式（若有的话）都等于0．

矩阵秩的两种定义互相等价．矩阵的初等变换不改变它的秩．求矩阵秩的方法：极大无关组法、非零子式法、初等变换法．

Ⅱ　线性方程组的理论

一　线性方程组相容性定理

设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{s1}\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{s2}\end{pmatrix}$, …, $\alpha_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{sn}\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_s\end{pmatrix}$,

则线性方程组(1)有解$\Leftrightarrow\beta$可由α_1, α_2,…, α_n线性表出。

相容性定理。线性方程组有解的必要充分条件是它的系数矩阵与增广矩阵的秩相等。

设线性方程组(1)的系数矩阵与增广矩阵的秩都是r.若$r=n$,则(1)有唯一解；若$r<n$，则(1)有无穷多个解。

齐次线性方程组有非零解的必要充分条件是其系数矩阵的秩小于未知量的个数。

二 线性方程组解的结构

在线性方程组有无穷多个解的情况下，存在解的结构问题。所谓解的结构问题，即解与解之间的关系问题。最终结果是：全部解可以由有限多个解表示出来。

n元线性方程组的解组成一个n维向量（k_1, k_2,…, k_n），称为线性方程组的一个解向量。

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases}\qquad(6)$$

则其解有下列性质：1）(6)的两个解的和还是(6)的解；2）(6)的一个解的倍数还是(6)的解；3）(6)的若干个解的线性组合还是(6)的解。

若η_1, η_2,…, η_t是(6)的解，且满足下列条件：1）(6)的任一解均可以表成η_1, η_2,…, η_t的线性组合；2）η_1, η_2,…, η_t线性无关，则称η_1, η_2, …, η_t是(6)的一个基础解系。

齐次线性方程组的基础解系具有下述性质：1）若 η_1，η_2，…，η_t是（6）的一个基础解系，$k\in F, k\neq 0$，则$k\eta_1$，$k\eta_2$,…，$k\eta_t$也是(6)的一个基础解系，从而，若(6)有基础解系，则(6)必有无穷多个基础解系；2）(6)的任意两个基础解系所含解向量的个数相等，换言之，基础解系所含解向量的个数由(6)唯一决定；3）与基础解系等价的线性无关的向量组也是基础解系；4）若基础解系含有t个向量，则任意t个线性无关的解向量均构成一个基础解系.

若(6)的系数矩阵的秩$r<n$，则(6)有基础解系，且基础解系含有$n-r$个解向量．此时，(6)的一个基础解系可以如此求出：用消元法解(6)，不妨设自由未知量是（x_{r+1}，x_{r+2},…，x_n），让其分别取值（1，0,…，0），（0，1,…，0），…，（0，0,…，1），则所得的$n-r$个解η_1，η_2,…，η_{n-r}即是.

若η_1，η_2,…，η_{n-r}是齐次线性方程组(6)的一个基础解系，则(6)的全部解就是$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$，其中$k_1$，$k_2$，…，$k_{n-r}$是数域F中的任意的数.

把一般线性方程组(1)的常数项均变为零，则得到齐次线性方程组(6)，称(6)是(1)的导出组.

若γ_0是线性方程组(1)的一个解，则方程组(1)的任一个解都可以表示为$\gamma=\gamma_0+\eta$的形式，其中η是导出组(6)的一个解.

为了求出方程组(1)的全部解，只要求出方程组(1)的一个解γ_0，常称为(1)的一个特解．再求出(1)的导出组(6)的一个基础解系η_1，η_2,…，η_t．从而，(1)的全部解就是$\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$，其中$k_1$，$k_2$,…，$k_t$是数域F中的任意的数.

三　线性方成组的解法

消元法．对(1)的增广矩阵$\bar{A}$施行初等行变换，化为阶梯形矩阵，判断是否有解，而在有解时，再施行初等行变换，把(1)的系数矩阵A化为加强的阶梯形矩阵，即可直接写出解.

公式法．设线性方程组(1)的系数矩阵A与增广矩阵$\overline{A}$的秩相等，记为r，且不妨设前r个方程对应的行向量线性无关，进而不妨设A的左上角的r阶子式不为零，从而(1)与

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n\end{cases}$$

同解。记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1r}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2r}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{r1}&a_{r2}&\cdots&a_{rr}\end{vmatrix},$$

$$D_j=\begin{vmatrix}a_{11}\cdots a_{1,j-1}&b_1-a_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n&a_{1,j+1}\cdots a_{1r}\\a_{21}\cdots a_{2,j-1}&b_2-a_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n&a_{2,j+1}\cdots a_{2r}\\\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\a_{r1}\cdots a_{r,j-1}&b_r-a_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n&a_{r,j+1}\cdots a_{rr}\end{vmatrix},$$

$j=1, 2,\cdots, r$，则得到用自由未知量$x_{r+1},\cdots, x_n$表示$x_1, x_2,\cdots, x_r$的公式

$$\begin{aligned}x_1&=D_1/D=d_1+c_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{1n}x_n,\\x_2&=D_2/D=d_2+c_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{2n}x_n,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_r&=D_r/D=d_r+c_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{rn}x_n,\end{aligned}$$

称为(1)的一般解（通解）．

例子．见§4，Ⅰ，一．

四　线性方程组理论的几何解释

线性方程组
$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\end{cases}\qquad(7)$$

中的每个方程均表示平面，其解是平面的交点的坐标．

对于(7)的系数矩阵A与增广矩阵$\overline{A}$，有

1）A与$\overline{A}$的秩均为1，两平面重合；

2）A的秩为1，$\overline{A}$的秩为2，两平面平行；

3）A与$\overline{A}$的秩均为2，两平面相交，设x_3为自由未知量，

则交线的方程为 $\begin{cases} x_1=d_1+c_1t \\ x_2=d_2+c_2t \\ x_3=t \end{cases}$.

Ⅳ 二元高次方程组

一 两个一元多项式的结式

设有$\mathbf{F}[x]$中的两个非零多项式$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$，它们的系数$a_0$，$b_0$不全为零，则$f(x)$，$g(x)$在$\mathbf{F}[x]$中有非常数的公因式的必要充分条件是，在$\mathbf{F}[x]$中存在非零的次数小于$m$的多项式$u(x)$与次数小于$n$的多项式$v(x)$，使$u(x)f(x)=v(x)g(x)$，

定义．行列式

$$\left|\begin{array}{ccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots\cdots & a_n & & \\ & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots\cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots\cdots & b_m & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots\cdots & b_m & & \\ & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots\cdots & b_m \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m\text{行} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n\text{行} \end{array}$$

称为$f(x)$与$g(x)$的结式，记为$R(f,g)$。

性质．$R(g,f)=(-1)^{n(n+m-1)}R(f,g)=(-1)^{nm}R(f,g)$

定理．当$m>0$，$n>0$时，$R(f,g)=0\Leftrightarrow f(x)$与$g(x)$在$\mathbf{F}[x]$中有非常数的公因式或者$a_0=b_0=0$。

对于$\mathbf{C}[x]$中的多项式$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，$n>0$

与$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$，$m>0$，成立：

1）当$a_0b_0\neq0$时，$f(x)$与$g(x)$有公根$\Leftrightarrow R(f,g)=0$；

2）$R(f,g)=0\Leftrightarrow f(x)$与$g(x)$有公根或$a_0=b_0=0$；

3）若$a_0=b_0=1$，α_1，α_2，…，α_n是$f(x)$的n个复根，β_1，β_2，…，β_m是$g(x)$的m个复根，则$R(f,g)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)$；

4）若α_1，α_2…，α_n是$f(x)$的n个复根，β_1，β_2，…，β_m是$g(x)$的m个复根，$a_0b_0\neq0$，则

$$R(f,g)=a_0{}^mg(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)=a_0{}^m\prod_{i=1}^{n}g(\alpha_i)$$

$$=(-1)^{mn}b_0{}^nf(\beta_1)f(\beta_2)\cdots f(\beta_m)=(-1)^{mn}b_0{}^n\prod_{j=1}^{m}f(\beta_j).$$

设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$是复数域**C**上的一个$n$（$n>1$）次多项式，$f'(x)$表示$f(x)$的导数，$D(f)$表示$f(x)$的判别式，则$R(f,f')=(-1)^{n(n-1)/2}a_0D(f)$，从而，$f(x)$有重根$\Leftrightarrow R(f,f')=0$。

二　二元高次方程组的解法

设有复数域**C**上的二元高次方程组

$$\begin{cases}f(x,y)=0\\g(x,y)=0,\end{cases}\tag{8}$$

则可以将$f(x,y)$，$g(x,y)$写为

$$f(x,y)=a_0(y)x^n+a_1(y)x^{n-1}+\cdots+a_n(y),$$
$$g(x,y)=b_0(y)x^m+b_1(y)x^{m-1}+\cdots+b_m(y),$$

其中$a_i(y)$，$b_j(y)$，$i=0$，1，…，n，$j=0$，1，…，m是y的多项式，把$f(x,y)$，$g(x,y)$看作x的多项式，并求结式，记为

$$R_x(f,g)=\begin{vmatrix} a_0(y) & a_1(y) & a_2(y) & \cdots & a_n(y) & & & \\ & a_0(y) & a_1(y) & \cdots\cdots & \cdots & a_n(y) & & \\ & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & & \\ & & & a_0(y) & a_1(y) & \cdots\cdots & a_n(y) & \\ b_0(y) & b_1(y) & b_2(y) & \cdots & b_m(y) & & & \\ & b_0(y) & b_1(y) & \cdots\cdots & b_m(y) & & & \\ & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & & \\ & & & b_0(y) & b_1(y) & \cdots\cdots & b_m(y) & \end{vmatrix}$$

若 (x_0, y_0) 是方程组(8)的一个复数解，则y_0就是$R_x(f,g)$的一个根；反之，若y_0是$R_x(f,g)$的一个复根，则 $a_0(y_0)=b_0(y_0)=0$，或者存在一个复数x_0，使 (x_0, y_0) 是(8)的一个解。

解法及例子．见§4，Ⅰ，六。

§3 重点难点

本章的主题词是：线性方程组，矩阵，系数矩阵，增广矩阵，高斯消元法，初等变换，阶梯形方程组，阶梯形矩阵，加强的阶梯形矩阵；n维向量，线性组合，向量组等价，线性相关，线性无关，极大(线性)无关组，向量组的秩，矩阵的行(列)秩，矩阵的k阶子式，矩阵的秩；相容性定理，解的结构，解向量，基础解系，导出方程组，特解，全部解，公式法，一般解（通解）；二元高次方程组，结式。

本章的基本方法是：高斯消元法，加强的阶梯形矩阵的化法，线性组合求法，极大无关组求法，线性相关性判定法，矩阵秩的求法，基础解系求法，求全部解的方法，求一般解的方法，二元高次方程组的解法。

本章的重点是：向量的线性相关性，线性方程组的理论，二元高次方程组的解法。

向量的线性相关性，不仅是n维向量的基本研究课题，而且

是定义矩阵的秩、研究线性方程组的相容性、定义齐次线性方程组的基础解系等的基础，可以说，它贯穿于全章，因此，成为本章的一个重点。

线性方程组的理论是本章的中心，它包括四个部分：相容性定理、解的结构、解法、几何解释。这些内容以后经常用到，特别地，解线性方程组、求齐次线性方程组的基础解系， 更是如此。高斯消元法中所体现出的形变解不变思想、标准形的思想，以后将反复出现。用增广矩阵代替线性方程组，求解方程组在矩阵上进行，这种分离系数的思想也很重要。因此，成为本章的一个重点。

二元高次方程组的解法，不仅自身是一个重要的研究课题，而且对中学数学的有关内容有具体的指导作用。因此，成为本章的一个重点。

本章的难点是：向量的线性相关性，齐次线性方程组的基础解系，结式。

向量的线性相关性，既是本章的一个重点，又是本章的一个难点。向量组线性相关、线性无关的概念，比较抽象，不容易理解其实质， 初学者往往感到困惑， 难以掌握； 与这一概念有关的性质、 定理、 概念等也较为困难，而且关系复杂头绪多，因此，成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1）理解并掌握线性组合的概念，通过一个向量是若干个向量的线性组合的事实，初步理解向量间的线性关系；2）由线性组合入手理解一向量组的向量之间的关系，从而理解“相关”与“无关”的含义；3）研究线性相关与线性无关定义的几种等价形式，以加深理解其实质；4）利用定义来证明一些向量组线性相关或线性无关，并总结出一般的途径，通过实践加深理解；5）通过判断一些有关结论的是与非，从正反两方面加深理解。

齐次线性方程组基础解系的定义中用到线性无关与线性组合

的概念，较为复杂；用有限多个解向量（基础解系）表示无限多个解，不易理解；关于基础解系定理的证明中也有不易理解的地方；因此，成为本章的一个难点．解决困难的方法是：1）用极大无关组的概念作类比，理解基础解系的概念；2）通过具体求基础解系，加深理解关于基础解系的定理的证明；3）通过关于基础解系的结论来加深理解．

结式的引入牵扯到多项式的有关问题及齐次线性方程组的理论，其表现形式的行列式较为复杂，一些结论也较难证明，因此，成为本章的一个难点．解决困难的方法是：1）搞清楚$F[x]$中多项式$f(x)$，$g(x)$有非常数公因式的必要充分条件，从而搞清楚结式的引入及组成；2）用具体的例子来加深理解；3）通过解二元高次方程组进一步认识结式的组成及意义．

§4 习题类解

Ⅰ 计算题

一 解线性方程组

解线性方程组一般采用消元法，而少用或不用公式法．步骤是：对增广矩阵进行初等行变换，使系数矩阵化为阶梯形矩阵，即可判定是否有解；当有解时，进一步对增广矩阵进行初等行变换，使系数矩阵化为加强的阶梯形矩阵，即可写出解．

例1 解下列线性方程组

1）$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1\\4x_1-2x_2+5x_3=4\\2x_1-x_2+4x_3=0;\end{cases}$ 2）$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1\\4x_1-2x_2+5x_3=4\\2x_1-x_2+4x_3=-1;\end{cases}$

3）$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4\\x_2-x_3+x_4=-3\\x_1+3x_2+x_4=1\\-7x_2+3x_3+x_4=-3.\end{cases}$

解 1）因为，

$$\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\4&-2&5&4\\2&-1&4&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\0&0&-1&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\0&0&-1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

所以，方程组无解。

2）因为，

$$\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\4&-2&5&4\\2&-1&4&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\0&0&-1&2\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&-1&0&7\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&\frac{7}{2}\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以，方程组的解是$x_1=\dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{2}x_2$，$x_3=-2$，其中$x_2$是自由未知量。

3）因为，

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\1&3&0&1&1\\0&-7&3&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&5&-3&5&-3\\0&-7&3&3&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&0&12\\0&0&-4&8&-24\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&0&12\\0&0&0&8&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&0&4\\0&1&-1&0&-3\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&0&0&-14\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&-8\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

所以，方程组的解是$x_1=-8$，$x_2=3$，$x_3=6$，$x_4=0$。

说明 本例中的三个小题分别说明了线性方程组解的个数的三种情况。

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b\end{cases}.$$

分析 本例的系数与常数项中有文字出现，此时，仍然按步骤进行，经过若干步之后，对于文字的取值进行讨论，以确定有解的条件，进而，求出线性方程组的解。类似的更为复杂的例子仍如此解决。

解 因为，

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&a\\0&1&2&2&6&3\\5&4&3&3&-1&b\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6&a-3\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&b-5\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&a\\0&0&0&0&0&b-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&a\\0&0&0&0&0&b-2\end{pmatrix}$$

所以，当且仅当$a=0$与$b=2$时，线性方程组有解。此时，其解是：$x_1=-2+x_3+x_4+5x_5$，$x_2=3-2x_3-2x_4-6x_5$，其中x_3，x_4，x_5为自由未知量。

二　向量间的线性关系

将向量β表示为向量α_1，α_2，…，α_s的线性组合，方法是：由$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s$出发，考虑分量相等的关系，得到关于$x_1,x_2,\cdots,x_s$的线性方程组，而后解方程组。当有解时，求得一解（$k_1$，$k_2,\cdots,k_s$），从而，$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$；当无解时，$\beta$不能表示为$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_s$的线性组合．

求非零向量组α_1，α_2，…，α_s的极大无关组，其方法见§2，Ⅱ，二。

例 3　将$\beta=(0,\ 0,\ 0,\ 1)$表示为α_1，α_2，α_3，α_4的线性组合：

$$\alpha_1=(1,\ 1,\ 0,\ 1),\qquad \alpha_2=(2,\ 1,\ 3,\ 1),$$
$$\alpha_3=(1,\ 1,\ 0,\ 0),\qquad \alpha_4=(0,1,-1,-1).$$

解　设$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$，则

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 \quad\quad =0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ \quad\ 3x_2 \quad\quad -x_4=0 \\ x_1+x_2 \quad\quad -x_4=1. \end{cases}$$

解得，$x_1=1$，$x_2=0$，$x_3=-1$，$x_4=0$，所以，$\beta=\alpha_1-\alpha_3$。

例 4　求向量组α_1，α_2，α_3，α_4，α_5的的一个极大无关组：

$$\alpha_1=(1,-1,\ 2,\ 4)\qquad \alpha_2=(0,\ 3,\ 1,\ 2),$$
$$\alpha_3=(3,\ 0,\ 7,\ 14),\quad \alpha_4=(1,-1,\ 2,\ 0),$$
$$\alpha_5=(2,\ 1,\ 5,\ 6).$$

解 1　取$\alpha_1=(1,-1,\ 2,\ 4)$；因为α_2不能由α_1线性表出，所以取$\alpha_2=(0,\ 3,\ 1,\ 2)$；因为$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$，所以不取$\alpha_3$；因为$\alpha_4$不能由$\alpha_1$，$\alpha_2$线性表出，所以取$\alpha_4=(1,-1,2,0)$；因为$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$，所以不取$\alpha_5$；因此，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_4$是一个极大无关组。

解 2　以α_1，α_2，α_3，α_4，α_5为列写成一个矩阵，而后进

行初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而，α_1，α_2，α_4线性无关，且$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$，所以，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_4$是一个极大无关组。

说明 1）本例中解2的方法较方便；2）利用解2的方法也可以求线性组合；3）利用解2的方法也可以判断一向量组线性相关或线性无关；4）利用解2的方法还可以求向量组的秩，也就是确定极大无关组所含向量的个数。

三 求矩阵的秩

求矩阵的秩，一般可采取下列方法：1）对矩阵同时施行初等行变换与初等列变换，直至化得的矩阵的秩显然可确定时为止；2）确定一个r阶子式$D\neq 0$，而包含D的所有$r+1$阶子式全为0，从而秩为r；3）上面两种方法合并使用。

方法1）的优点是简单、迅速，缺点是不能决定行（列）向量组的极大无关组；方法2）的优点是可以决定行(列)向量组的极大无组，缺点是一般计算量较大．应根据不同的要求选取方法。

例5 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 10 \\ 1 & 11 & 3 & 6 & 16 \\ 1 & -19 & -7 & -14 & -34 \end{pmatrix},$$

试求A的秩。

解 1　对A施行初等变换

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0&1\\0&6&2&4&10\\1&11&3&6&16\\1&-19&-7&-14&-34\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&0&1\\0&6&2&4&10\\0&9&3&6&15\\0&-21&-7&-14&-35\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&0&0&1\\0&3&1&2&5\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B,$$

显然，B的秩为2，从而A的秩也为2。

解 2　A有一个二阶子式　$D=\begin{vmatrix}1&2\\0&6\end{vmatrix}=6\neq0$，

而A的所有包含D的三阶子式都等于零：

$$\begin{vmatrix}1&2&0\\0&6&2\\1&11&3\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}1&2&0\\0&6&4\\1&11&6\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}1&2&1\\0&6&10\\1&11&16\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}1&2&0\\0&6&2\\1&-19&-7\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}1&2&0\\0&6&4\\1&-19&-14\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}1&2&1\\0&6&10\\1&-19&-34\end{vmatrix}=0,$$

所以，A的秩为2。

四　求基础解系、全部解

求齐次线性方程组的基础解系，方法是：对其系数矩阵施行初等行变换，使其系数矩阵变为加强的阶梯形矩阵，即可直接写出一个基础解系。

求线性方程组的全部解，方法是：求出一特解γ_0，求出其导出组的一个基础解系η_1，η_2，…，η_t。写出全部解　$\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$，其中$k_1$，$k_2$，…，$k_t$为F中的任意数。

例 6　求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$$

的一个基础解系，并写出其全部解。

解 因为，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以，它的一个基础解系是：$\eta_1=(1,-2,1,0,0)$，$\eta_2=(1,-2,0,1,0)$，$\eta_3=(5,-6,0,0,1)$，它的全部解是：$k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3=(k_1+k_2+5k_3,-2k_1-2k_2-6k_3,k_1,k_2,k_3)$，其中$k_1$，$k_2$，$k_3$是F中任意的数。

例7 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0 \end{cases}$$ 的全部解。

解 因为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以，方程组的一特解$\gamma_0=(\frac{5}{4},\ -\frac{1}{4},\ 0,\ 0)$，其导出组的一基础解系是：$\eta_1=(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ 1,\ 0)$，$\eta_2=(-\frac{3}{4},\ \frac{7}{4},\ 0,\ 1)$，其全部解为$\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2=(\frac{5}{4}+\frac{3}{2}k_1-\frac{3}{4}k_2,\ -\frac{1}{4}+\frac{3}{2}k_1+\frac{7}{4}k_2,\ k_1,\ k_2)$，其中$k_1$，$k_2$是F中任意的数。

五　线性方程组的应用

有些几何问题或其它问题，归结为解线性方程组。

例8　试求四点$M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$，$M_3(x_3,y_3)$，$M_4(x_4,y_4)$共圆的必要充分条件。

解　设圆的一般方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，则四点共圆的必要充分条件是以D，E，F为未知量的方程组

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0 \\ x_2^2+y_2^2+Dx_2+Ey_2+F=0 \\ x_3^2+y_3^2+Dx_3+Ey_3+F=0 \\ x_4^2+y_4^2+Dx_4+Ey_4+F=0 \end{cases}$$

有解，即矩阵

$$\begin{pmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix}$$

有相同的秩。

例9　试求通过点$M_1(0,\ 0)$，$M_2(1,\ 0)$，$M_3(-1,\ 0)$，$M_4(1,\ 1)$，$M_5(-1,\ 1)$的二次曲线方程。

解　设二次曲线的一般方程为$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，将各点的坐标代入，得到以A，B，C，E，F为未知量的线性方程组

$$\begin{cases} F=0 \\ A+D+F=0 \\ A-D+F=0 \\ A+B+C+D+E+F=0 \\ A-B+C-D+E+F=0, \end{cases}$$

解这个方程组，得：$A=B=D=F=0$，$C=-E$，E为自由未知量，取$E=-1$，从而$C=1$，所求的二次曲线的方程为 $y^2-y=0$。

六　解二元高次方程组

解二元高次方程组的步骤是：1）将方程改写为按一个未知量（不妨为y）降幂排列；2）写出结式$R_y(f,g)$，并求出其复根$x_1,\cdots,x_k$；3）对于每个x_i，代入原方程组，得到两个y的多项式，求它们的公根；4）写出方程组的解。

例10　解方程组

$$\begin{cases} y^2-7xy+4x^2+13x-2y-3=0 \\ y^2-14xy+9x^2+28x-4y-5=0. \end{cases}$$

解　原方程组改写为

$$\begin{cases} y^2-(7x+2)y+(4x^2+13x-3)=0 \\ y^2-(14x+4)y+(9x^2+28x-5)=0, \end{cases}$$

求得$R_y(f,g)=-24x(x-1)(x-2)(x+2)$，其四个根为0，1，2，-2。

用$x=0$代入得　$\begin{cases} y^2-2y-3=0 \\ y^2-4y-5=0, \end{cases}$

公根是$y=-1$，从而（0，-1）为原方程组的一个解。

同法求得另外三个解(1，2)，(2，3)与(-2，1)。原方程组共有四个解。

Ⅱ　证明题

一　线性相关、线性无关

证明的方法一般有两种：1)根据定义直接证明，由一线性组合出发，推出系数应具有的性质；2）反证法，由于线性相关与线性无关是两个互相排斥的概念,所以反证法具有基本的重要性.

例1 证明：若向量组α_1，α_2,…，$\alpha_m(m\geqslant 2)$中,$\alpha_1\neq 0$，且每一个$\alpha_i(i=2, 3,\cdots, m)$均不能由它前面的$i-1$个向量线性表出，则$\alpha_1$，$\alpha_2$,…，$\alpha_m$线性无关。

证明1 设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1}+k_m\alpha_m=0$。因为$\alpha_m$不能由$\alpha_1$，$\alpha_2$,…，$\alpha_{m-1}$线性表出，所以必有$k_m=0$.从而$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1}=0$。又因为$\alpha_{m-1}$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-2}$线性表出，所以必有$k_{m-1}=0$。如此下去，同理可得$k_{m-2}=k_{m-3}=\cdots=k_3=k_2=0$,从而$k_1\alpha_1=0$.因为$\alpha_1\neq 0$，所以$k_1=0$。因此，$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$，$\alpha_1$，$\alpha_2$,…，$\alpha_m$线性无关。

证明2 用反证法。设α_1，α_2,…，α_m线性相关，则有一组不全为0的数k_1，k_2,…，k_m，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$.从$k_m$开始向前考察系数，设$k_i$是第一个不为0的数,则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_i\alpha_i=0$。且必有$i>1$，否则,$k_1\alpha_1=0$，得出$\alpha_1=0$，与已知条件矛盾。因为$i>1$且$k_i\neq 0$，所以$\alpha_i$可由$\alpha_1$，$\alpha_2$,…，$\alpha_{i-1}$线性表出,从而与题设矛盾.因此,$\alpha_1$，$\alpha_2$,…，$\alpha_m$线性无关.

二 极大无关组、向量组的秩

证明向量组的一个部分组构成极大无关组，基本的方法就是根据极大无关组的定义证明.

证明向量组的秩一般考虑其极大无关组。

例2 证明：若α_1，α_2,…，α_s的秩是r，$r>0$，则α_1，α_2,…，α_s中任意r个线性无关的向量均构成它的一个极大无关组.

证明 设α_{i_1}，α_{i_2},…，α_{i_r}是α_1，α_2,…，α_s中的任意r个线性无关的向量．因为，α_i，α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r}可由一个极大无关组线性表出，而由秩是r知，极大无关组含有r个向量，所以，α_i，α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r}线性相关，$i=1, 2,\cdots, s$。因此，

α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r}是一个极大无关组。

例3 设向量组α_1，α_2，…，α_s的秩为r，在其中任取m个向构成部分组A，证明A的秩$\geqslant r+m-s$。

证明 当$r=0$时，显然成立。当$r>0$时，取α_1，α_2，…，α_s的一个极大无关组B，则B之外剩下$s-r$个向量，从而A中至少有$m-(s-r)$个向量取自B，它们线性无关，因此，A的秩$\geqslant r+m-s$。

三 向量组等价

证明两个向量组等价，按照定义，就是要证明它们可以互相线性表出。由于一个向量组与其任一极大无关组等价，所以证明两个向量组等价可以转化为证明它们的极大无关组等价，从而可能使问题得以简化。

例4 已知两个向量组有相同的秩，且其中一个可以被另一个线性表出，证明：这两个向量组等价。

证明 设α_1，α_2，…，α_s（Ⅰ）与β_1，β_2，…，β_t（Ⅱ）的秩均为r。当$r=0$时，显然成立。当$r>0$时，取（Ⅰ）的一极大无关组（Ⅲ），取（Ⅱ）的一个极大无关组（Ⅳ）。由于向量组与其极大无关组等价，所以要证（Ⅰ）与（Ⅱ）等价，只要证明（Ⅲ）与（Ⅳ）等价。设（Ⅱ）可由（Ⅰ）线性表出，则（Ⅳ）可由（Ⅲ）线性表出，从而，只要证明（Ⅲ）可由（Ⅳ）线性表出。用反证法，设（Ⅲ）中有一向量α_i不能由β_{j_1}，β_{j_2}，…β_{j_r}（Ⅳ）线性表出，则β_{j_1}，β_{j_2}，…β_{j_r}，α_i线性无关。但是，β_{j_1}，β_{j_2}，…，β_{j_r}，α_i可由（Ⅰ）线性表出，而$r+1>r$，所以β_{j_1}，β_{j_2}，…β_{j_r}，α_i线性相关，引出矛盾。因此，（Ⅲ）可由（Ⅳ）线性表出。

四 矩阵的秩

证明矩阵的秩的方法是：1）通过初等变换化得容易确定其秩的矩阵；2）通过子式；3）通过行（列）向量组。

例5 设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{p\times q}$的秩分别为s和t，证明

$$C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$ 的秩为$s+t$。

证明1 对C进行初等变换，可化为

$$C\to\begin{pmatrix} E_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} E_{s+r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=C_1$$

由于初等变换不改变矩阵的秩，所以秩(C)=秩(C_1)=$s+t$。

证明2 当A，B中至少有一个为零矩阵时，显然成立。当A，B均不为零矩阵时，A，B分别有s阶子式$D_s\neq0$与t阶子式$D_t\neq0$，而A的$s+1$阶与B的$t+1$阶子式均为0．

$$D_s=\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_1j_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_sj_1} & \cdots & a_{i_sj_s} \end{vmatrix},\qquad D_t=\begin{vmatrix} b_{k_1l_1} & \cdots & b_{k_1l_t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k_tl_1} & \cdots & b_{k_tl_t} \end{vmatrix}.$$

由拉普拉斯定理知，C有$s+t$阶子式

$$D_{s+t}=\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_1j_s} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_sj_1} & \cdots & a_{i_sj_s} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{k_1l_1} & \cdots & b_{k_1l_t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{k_tl_1} & \cdots & b_{k_tl_t} \end{vmatrix}=D_sD_t\neq0。$$

把C的第i行记为α_i，则C的所有行向量都可以由α_{i_1}，…，α_{i_s}，α_{k_1}，…，α_{k_t}线性表出，从而C的任意$s+t+1$阶子式均为0，因此，C的秩是$s+t$。

证明3 当A，B中至少有一个为零矩阵时，显然成立．当A，B均不为零矩阵时，设$\widetilde{\alpha}_{i_1}$，…，$\widetilde{\alpha}_{i_s}$为A的行向量组的一个极大无关组，$\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{k_1}$，…，$\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{k_t}$为B的行向量组的一个极大无关组，$i_1,\cdots,i_s,k_1,\cdots,k_t$分别为它们所在C中的行数，C的行向量记为

α_i，$i=1, 2, \cdots, m+p$，则易证$\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_s}, \alpha_{k_1}, \cdots, \alpha_{k_t}$为C的行向量组的一个极大无关组。因此，C的秩为$s+t$。

五　线性方程组的相容性

此类题目一般根据相容性定理进行证明。

例 6　设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数矩阵A的秩等于矩阵

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

的秩，证明：该方程组有解。

证明　由矩阵的秩的定义知，秩（A）≤秩（$\bar{A}$）≤ 秩(C)，$\bar{A}$是增广矩阵。但是，由已知条件得，秩（A）=秩（C），所以，秩（A）=秩（$\bar{A}$），方程组有解。

六　齐次线性方程组的基础解系

此类题目根据齐次线性方程组的基础解系的定义及有关的定理进行证明。

例 7　设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数行列式D=0，而D中a_{ij}的代数余子式$A_{ij}\neq 0$，证明：

它的全部解为（$kA_{i1},\cdots,kA_{ij},\cdots,kA_{in}$），$k$为F中的任意数.

证明 因为D=0，所以，根据行列式的展开定理知，（$A_{i1},\cdots,A_{ij}\cdots,A_{in}$）为方程组的一个解. 因为，D=0而$A_{ij}\neq 0$，所以，系数矩阵A的秩是$n-1$，从而基础解系由一个非零解构成. 因此，（$A_{i1},\cdots,A_{ij},\cdots,A_{in}$）是一个基础解系，其全部解是（$kA_{i1},\cdots,kA_{ij},\cdots,kA_{in}$），$k$是F中的任意数.

§5 补充资料

Ⅰ 非齐次线性方程组的基础解系

定义. 线性方程组的解向量集合中，若有k个解向量具有性质：1）这k个解向量线性无关；2）方程组的任意解可由这k个解线性表出，则称这k个解向量是线性方程组的一个基础解系.

定理. 含n个未知量的非齐次线性方程组，当其系数矩阵与增广矩阵有相等的秩$r<n$时，必有基础解系；每个基础解系包含$n-r+1$个解向量；且它有无穷多个基础解系，而它的k个线性无关解向量为基础解系的必要充分条件是$k=n-r+1$. 又，它的全部解可以由一个基础解系的一切线性组合使组合系数之和等于1时而得到.

Ⅱ 线性方程组的近似解法

一 简单迭代法

步骤. 1）将方程组中的未知量$x_1,x_2,\cdots,x_n$表成$x_1,x_2,\cdots,x_n$的线性式；2）以任意一组初始值$x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}$代入线性式中，得到一组值$x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_n^{(1)}$；3）将每次得到的一组新值再代入线性式中得到另一组新值，重复这种过程，得到一组序列$\{x_1^{(k)}\},\{x_2^{(k)}\},\cdots,\{x_n^{(k)}\}$；4）当$k$变得很大时，若这组序列的项值变得比较稳定，则可取一组值$x_1^{(k_0)},x_2^{(k_0)},\cdots,x_n^{(k_0)}$作为原方程组的解的近似值.

二 逐个迭代法

步骤．1）从原方程组用 x_1，x_2，…，x_n 的线性式表示出 x_1，x_2，…，x_n；2）以任意一组初始近似值 $x_1^{(0)}$，$x_2^{(0)}$，…，$x_n^{(0)}$ 代入 x_1 的表达式中，得到 $x_1^{(1)}$，再以 $x_1^{(1)}$，$x_2^{(0)}$，…，$x_n^{(0)}$ 代入 x_2 的表达式中，得到 $x_2^{(1)}$，…，以 $x_1^{(1)}$，$x_2^{(1)}$，…，$x_{n-1}^{(1)}$，$x_n^{(0)}$ 代入 x_n 的表达式中，得到 $x_n^{(1)}$，从而，得到一次近似 $x_1^{(1)}$，$x_2^{(1)}$，…，$x_n^{(1)}$；3）重复2）的过程，得到 k 次近似 $x_1^{(k)}$，$x_2^{(k)}$，…，$x_n^{(k)}$，从而建立迭代格式；4）当 k 很大时，若 $x_1^{(k)}$，$x_2^{(k)}$，…，$x_n^{(k)}$ 的每一项变化趋于稳定，则可求得原方程组的近似解．

Ⅱ　主元素消去法

一　总体选主元素的消去法

从线性方程组的所有系数中，取绝对值最大的系数，将具有这个系数的未知量作为消去元．每一次都这样做．这种消元法称为主元素消去法，每次所取的绝对值最大的系数称为主元素．

步骤．1）观察方程组，取含绝对值最大的系数为 r 的未知量作为消去元；2）由主元素 r 所在方程消去其它方程中对应的未知量，即，以 $\frac{c}{r}$ 乘以这个方程后加到另一个方程上，c 由另一个方程决定；3）将所得的新方程组继续采取以上方法，直到所得到的是一个仅含一个未知量的方程；4）由仅含一个未知量的方程解出这个未知量，再逐次代入主元素所在方程，从而得到方程组的解。

二　按列选主元素的方法

步骤．1）从方程组中选取 x_1 的绝对值最大的系数作为主元素进行消元，去掉主元素所在的方程，得到关于 x_2，x_3，…，x_n 的新方程组；2）从这些新方程中选取 x_2 的绝对值最大的系数作为主元素进行消元，去掉主元素所在方程，得到关于 x_3，…，x_n 的新方程组；3）对每次得到的新方程组重复以上步骤，直至得到得到一个仅含 x_n 的方程为止；4）从最后这个仅含 x_n 的方程中

解出x_n，再逐个代入主元素所在方程，得到方程组的解。

Ⅳ 历史资料点滴

我国古代数学著作《九章算术》中的第八章“方程”，主要是讲多元线性方程组应用问题的解法。这里的“方程”和现在的方程式完全不同，不是指的含有未知数的等式，而是指的用数字排成的相当于矩阵的长方形阵。求解就在由系数和常数项排成的“方程”上进行。其解法称为“直除”，较为繁琐，相当于现在的初等变换。三国时的数学家刘徽，改进“直除”法，将对应项系数互乘，对减一次即可消去一项，但对后人影响不大。宋、元时的数学家秦九韶于1247年完成《数书九章》一书，彻底改进连续相减的“直除”法，一直采用“互乘相消法”，相当于增广矩阵的初等变换，把秦九韶的式子稍加改变，加上矩阵的符号，就与现代的完全一样。

线性方程组的研究在西方是莱布尼兹于1678年以前开创的。后来，伴随着行列式与矩阵的产生逐步发展并完善。而矩阵秩的概念则要迟到十九世纪才由弗罗宾组斯提出。

§6 基本习题

1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4 \qquad =1 \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3 \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1. \end{cases}$$

2 解线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4. \end{cases}$$

3　求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \end{cases}$$

的一个基础解系。

4　求$\alpha_1=(6, 4, 1, -1, 2)$，$\alpha_2=(1, 0, 2, 3, -4)$，$\alpha_3=(1, 4, -9, -16, 22,)$，$\alpha_4=(7, 1, 0, -1, 3)$的一个极大无关组。

5　解方程组

$$\begin{cases} 5y^2-6xy+5x^2-16=0 \\ y^2-xy+2x^2-y-5x=0\text{。} \end{cases}$$

6　证明：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ $(s>1)$线性相关的必要充分条件是至少有一个向量可以由其余的向量线性表出。

7　证明：若有一向量α能由α_1，$\alpha_2, \cdots$，α_s线性表出且表法唯一，则α_1，$\alpha_2, \cdots$，α_s线性无关。

8　设三个向量组α_1，$\alpha_2, \cdots$，α_s；β_1，β_2，$\cdots$，β_t；α_1，α_2，$\cdots$，α_s，β_1，β_2，$\cdots$，β_t的秩分别为r_1，r_2，r，证明：$max(r_1, r_2)\leqslant r\leqslant r_1+r_2$。

9　证明：线性方程组$x_1-x_2=a_1$，$x_2-x_3=a_2$，$x_3-x_4=a_3$，$x_4-x_5=a_4$，$x_5-x_1=a_5$有解的必要充分条件是$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$。

10　证明：若n个未知量的齐次线性方程组的系数矩阵的秩$r<n$，则它的任意$n-r$个线性无关的解向量均构成它的一个基础解系。

第四章 矩　　阵

§1 概括说明

矩阵这一概念是从线性方程组和其它许多事物中抽象出来的。矩阵是一种有力的工具，也是一种重要的研究对象，贯穿于线性代数的各个部分，处于中心的地位。矩阵的计算和理论，不仅在代数学自身有广泛的应用（如线性方程组的求解、线性变换的讨论、群的研究等），而且在数学的其它学科、在物理学及其它科学技术领域、在经济及其它社会科学领域都有广泛的应用。矩阵的运算是矩阵理论研究的基础，本章主要讨论运算及有关的问题，内容比较具体，但计算较多，并且必须熟练掌握。

本章的内容分为八个部分：矩阵及其运算，矩阵的分块，初等矩阵，可逆矩阵，矩阵的等价，几类特殊矩阵，分块乘法的初等变换，广义逆矩阵。

矩阵的运算有加法、数乘、乘法、转置四种，其中，乘法最为重要，也较为复杂，而且乘法不满足交换律，这种情况也是第一次出现。

矩阵的分块是将阶数大的矩阵转化为阶数小的矩阵，而且在分块的基础上再进行运算，将小块矩阵作为通常的元素看待。这种思想方法是重要的。

初等矩阵是由单位矩阵经过一次初等变换而产生的矩阵，它的作用主要是：把对矩阵进行行（列）的初等变换转化为这个矩阵左（右）乘一个相应的初等矩阵。

可逆矩阵是一类重要的矩阵，其根本作用在于，就一定意义上来说，可逆矩阵给出矩阵的除法运算。

矩阵的等价是由初等变换引出的。等价具有反身性、对称

性、传递性，从而对矩阵进行分类，建立矩阵标准形的概念，进而，矩阵在等价意义下化为最简形式，由矩阵的秩唯一决定。

几类特殊矩阵包括：基底矩阵；对角矩阵，准对角矩阵；三角矩阵；对称矩阵，反对称矩阵；幂等矩阵，幂零矩阵，幺幂矩阵。

分块乘法的初等变换，就是将分块乘法与初等变换相结合，从而成为矩阵运算中极端重要的手段。

广义逆矩阵是一种新的数学工具，在代数、数理统计、计算方法、微分方程、泛函分析、物理学、测量学等方面有着广泛的应用。

本章的补充资料是：置换矩阵，行列式降阶计算法，矩阵的直积，复合矩阵，Moore-Penrose逆与Drazin逆，高矩阵，矩阵分析，历史资料点滴。

§2　内容提要

Ⅰ　矩阵及其运算

一　矩阵的概念

数域F上的$s\times n$个数排成的s行n列的矩形数表，称为F上的一个$s\times n$矩阵．记为$A_{s\times n}$，或A_{sn}，简记为A，也记为$(a_{ij})_{s\times n}$，或$(a_{ij})_{sn}$，或(a_{ij})。即

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}.$$

其中组成矩阵A的数称为A的元素，而A的第i行第j列交叉处的元素，称为A的(i,j)元素。

$n\times n$矩阵称为n阶矩阵。数域F上的所有n阶矩阵作成的集合，记为$M_n(F)$。

若矩阵A与B的行数相同，列数相同，且任意(i,j)元素均对应相等，则称A与B相等，记为$A=B$。

二　矩阵的加法

设有两个行数相同、列数也相同的矩阵 $A=(a_{ij})_{sn}$，$B=(b_{ij})_{sn}$，则称矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{sn}$为A与B的和，记为$A+B$．简言之，矩阵相加，即对应元素相加。

元素全为数0的矩阵称为零矩阵，记为0_{sn}，在不致引起混淆的情况下，简记为0．

$(-a_{ij})_{sn}$称为$A=(a_{ij})_{sn}$的负矩阵，记为$-A$．从而，将矩阵的减法定义为：$A-B=A+(-B)$．

矩阵的加法具有性质：1）$(A+B)+C=A+(B+C)$；2）$A+B=B+A$；3）$A+0=A$；4）$A+(-A)=0$．

关于秩，有：秩$(A+B)\leqslant$秩$(A)+$秩(B)．

三　数量乘法

对于数域F中的数k，F上的矩阵$A=(a_{ij})_{sn}$，可以作数量乘法：$kA=(ka_{ij})_{sn}$，kA称为k与A的数量乘积。

矩阵的数量乘法具有性质：1）$(k+l)A=kA+lA$；2）$k(A+B)=kA+kB$；3）$k(lA)=(kl)A$；4）$1A=A$；5）$k(AB)=(kA)B=A(kB)$；6）$k0=0$，$0A=0$．

关于秩，有：当$k\neq0$时，秩$(kA)=$秩(A)；当$k=0$时，秩$(kA)=0$．

四　矩阵的乘法

设有数域F上的矩阵A，B．当$A=(a_{ik})_{sn}$的列数等于$B=(b_{kj})_{nm}$的行数时，可以作乘法：$AB=(a_{ik})_{sn}(b_{kj})_{nm}=(c_{ij})_{sm}$，$c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，$i=1,2,\cdots,s$，$j=1,2,\cdots,m$，AB称为A与B的积。

设有一个n阶矩阵，若它的$(1,1)$，$(2,2)$，…，(n,n)元素均为1，而其余元素均为零，则称该矩阵为n阶单位矩阵，记为E_n，简记为E．

矩阵的乘法具有性质：1）$(AB)C=A(BC)$；2）$A(B+C)=AB+AC$，$(B+C)A=BA+CA$；3）$E_sA_{sn}=A_{sn}$，$A_{sn}E_n=A_{sn}$；4）$0C=0$，$A0=0$。

$AB\neq BA$，原因在于：1）AB有意义，BA未必有意义；2）即使AB与BA均有意义，但二者行数与列数未必一致（AB与BA均有意义，且阶数相同$\Leftrightarrow$A与B为同阶矩阵）；3）即使AB与BA均有意义，而且它们的阶数也相同，仍然未必相等。因此，矩阵乘法的交换问题，是一个复杂的问题。

由$AB=0$不能推出$A=0$或$B=0$，从而，由$AB=AC$且$A\neq 0$不能推出$B=C$。因此，矩阵乘法消去律的问题，也是一个复杂的问题。

对于n阶矩阵A与B，乘积AB的行列式具有性质：

$$|AB|=|A||B|.$$

关于秩，有：秩$(AB)\leqslant min$（秩(A)，秩(B)）。

五　矩阵多项式

由于矩阵的乘法满足结合律，所以多个矩阵的乘积有意义。从而，n阶矩阵A的正整数次方幂定义为：$A^1=A$，$A^{k+1}=A^kA$，换言之，A^k就是k个A相乘。

方幂具有性质：对任意正整数k，l，成立$A^kA^l=A^{k+l}$，$(A^k)^l=A^{kl}$，但$(AB)^k\neq A^kB^k$；当$AB=BA$时，成立$(AB)^k=A^kB^k$，$A^kB^l=B^lA^k$，$(A+B)^k=A^k+c_k^1A^{k-1}B+c_k^2A^{k-2}B^2+\cdots+c_k^{k-1}AB^{k-1}+B^k$。

若$f(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0\in \mathbf{F}[\lambda]$，A为$n$阶矩阵，则$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$称为矩阵A的多项式。

若$f(\lambda)$，$g(\lambda)$，$h(\lambda)$，$p(\lambda)\in\mathbf{F}[\lambda]$，则成立：1）$h(\lambda)=f(\lambda)+g(\lambda)\Rightarrow h(A)=f(A)+g(A)$；2）$p(\lambda)=f(\lambda)g(\lambda)\Rightarrow p(A)=f(A)g(A)$；3）$f(A)g(A)=g(A)f(A)$；4）$AB=BA\Rightarrow$

$Bf(A)=f(A)B$； 5）$AB=BA\Rightarrow f(A)g(B)=g(B)f(A)$。

六　转置

若$A=(a_{ij})_{sn}$，则$A'=(a_{ji})_{ns}$称为A的转置。

转置具有性质：1）$(A')'=A$；2）$(A+B)'=A'+B'$；3）$(AB)'=B'A'$；4）$(kA)'=kA'$；5）$|A'|=|A|$。

关于秩，有：秩（A'）=秩（A）。

Ⅱ　矩阵的分块

矩阵的分块是一个在处理阶数较高的矩阵时常用的方法。把一个大矩阵看成是由一些小矩阵组成的，如同矩阵是由数组成的一样，把这些小矩阵当作数一样来处理，从而进行运算。

用分块矩阵来作矩阵加法时，必须将两个矩阵用同样的分法来分成相应的小块.设A与B都是$s\times n$矩阵,把A与B进行如下分块

$$A=\overset{\begin{matrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{matrix}}{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tl} \end{pmatrix}}\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{matrix} \qquad B=\overset{\begin{matrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{matrix}}{\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1l} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tl} \end{pmatrix}}\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{matrix};$$

其中A_{ij}与B_{ij}都是$s_i\times n_j$矩阵；$s_1+s_2+\cdots+s_t=s$，$n_1+n_2+\cdots+n_l=n$，则

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1l}+B_{1l} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2l}+B_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1}+B_{t1} & A_{t2}+B_{t2} & \cdots & A_{tl}+B_{tl} \end{pmatrix}.$$

用分块矩阵来作乘法时，第一个矩阵的列的分法必须与第二个矩阵的行的分法相一致。设A是一个$s\times n$矩阵，B是一个$n\times m$矩阵，把A与B进行如下分块：

$$A=\overset{\begin{matrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{matrix}}{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tl} \end{pmatrix}}\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{matrix} \qquad B=\overset{\begin{matrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{matrix}}{\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{lr} \end{pmatrix}}\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{matrix}$$

$$\binom{s_1+s_2+\cdots+s_t=s}{n_1+n_2+\cdots+n_l=n};\qquad \binom{n_1+n_2+\cdots+n_l=n}{m_1+m_2+\cdots+m_r=m},$$

其中A_{ij}是$s_i\times n_j$矩阵，B_{ij}是$n_i\times m_j$矩阵，则

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{t1} & C_{t2} & \cdots & C_{tr} \end{pmatrix}\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{matrix},$$

（列分块为 $m_1\ m_2\ \cdots\ m_r$）

其中，$C_{pq}=A_{p1}B_{1q}+A_{p2}B_{2q}+\cdots+A_{pl}B_{lq}=\sum_{k=1}^{l}A_{pk}B_{kq}$，

$p=1,2,\cdots,t$，$q=1,2,\cdots,r$.

Ⅲ 初等矩阵

由单位矩阵经过一次初等变换而得到的矩阵称为初等矩阵.

初等矩阵有三种，且仅有三种：1）把单位矩阵E的第i行（列）与第j行（列）互换，得到的初等矩阵记为$P(i,j)$，称为换法矩阵；2）用数域**F**中的非零数c乘E的第i行（列），得到的初等矩阵记为P（$i(c)$），称为倍法矩阵；3）把E的第j行（i列）的k倍加到第i行（j列）上，得到的初等矩阵记为P（$i,j(k)$），称为消法矩阵. 换法矩阵可以写为倍法矩阵与消法矩阵的乘积.

设A是一个$s\times n$矩阵. 对A施行一次初等行变换，就相当于在A的左边乘上一个相应的s阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换，就相当于在A的右边乘上一个相应的n阶初等矩阵.

Ⅳ 可逆矩阵

一 定义

设A是一个n阶矩阵. 若有矩阵B，使$AB=BA=E$，则称A为可逆矩阵，称B是A的逆矩阵.

若n阶矩阵A的行列式不等于零，则称A为非退化的（非奇异的、满秩的）；否则，称为退化的（奇异的、降秩的）.

设A是一个n阶矩阵：$A=(a_{ij})$，$A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是行列式$|A|$中元素a_{ij}的代数余子式，则矩阵$A^*=(A_{ji})$ 称为A的伴随矩阵。$AA^*=A^*A=|A|E$。

二 性质

可逆矩阵具有性质：1）若A可逆，则A的逆矩阵唯一，记为A^{-1}；2）$(A^{-1})^{-1}=A$；3）$|A^{-1}|=|A|^{-1}$；4）若A可逆，则$|A|\neq 0$，且$A^{-1}=|A|^{-1}A^*$； 5）若A可逆，则A的转置矩阵A'也可逆，而且$(A')^{-1}=(A^{-1})'$；6）若A与B都可逆，则AB也可逆，而且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；7）若A是一个$s\times n$矩阵，P是一个s阶可逆矩阵，Q是一个n阶可逆矩阵，则秩(A)=秩(PA)=秩(AQ)=秩(PAQ)；8）若AB=AC，且A可逆，则B=C；9）若A可逆，则由$AX=B$得$X=A^{-1}B$，由$YA=B$得$Y=BA^{-1}$，可分别看作左除与右除。

三 判定

对于n阶矩阵A，下列条件等价：1）存在矩阵B，使AB=BA=E；2）$|A|\neq 0$；3）存在n阶矩阵B，使AB=E；4）存在n阶矩阵B，使BA=E；5）秩(A)=n；6）A是初等矩阵的乘积；7）A可以经初等变换化为单位矩阵E； 8）对于任意矩阵B，有秩（AB）=秩（B）。

四 求法

公式法：$A^{-1}=|A|^{-1}A^*$。

初等变换法：$(A\ E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\ A^{-1})$；

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}E\\A^{-1}\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}A & E\\E & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行、列变换}}\begin{pmatrix}E & C\\B & 0\end{pmatrix},\ A^{-1}=BC.$$

初等矩阵的逆矩阵： $P(i,j)^{-1}=P(i,j)$，$P(i(c))^{-1}=P(i(c^{-1}))$，$P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k))$。

Ⅴ 矩阵的等价

若矩阵B可以由矩阵A经过一系列初等变换而得到，就称A与B等价，记为$A\cong B$。

矩阵的等价具有性质：1）反身性：$A\cong A$；2）对称性：若$A\cong B$，则$B\cong A$；3）传递性：若$A\cong B$，$B\cong C$，则$A\cong C$。

设A是一个秩为r的矩阵，则A等价于下面的矩阵：(1,1)，(2,2)，…，(r,r)元素是1，其余元素均为0．称为A的等价标准形。

设矩阵A与B都是$s\times n$矩阵，则下列条件等价：1）A与B等价；2）存在初等矩阵P_1，P_2，…，P_s，Q_1，Q_2，…，Q_t，使得$B=P_1P_2\cdots P_sAQ_1Q_2\cdots Q_t$；3）存在可逆矩阵P与Q，使得$B=PAQ$；4）A与B的等价标准形相同；5）A与B的秩相同。

互相等价的矩阵分为一个类，即组成一个集合，称为矩阵的等价类。全体n阶矩阵分为$n+1$个互不相同的等价类。

对于任意矩阵A，存在可逆矩阵P与Q，使PAQ成为A的等价标准形。

Ⅵ 几类特殊的矩阵

一 基底矩阵

设E_{ij}是一个$s\times n$矩阵，并且，除(i,j)元素为1外，其余元素均为0，则称$E_{ij}(i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,n)$是一组基底矩阵。

对于任意矩阵$A=(a_{ij})_{sn}$，有 $A=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$.

二 数量矩阵

矩阵kE称为数量矩阵。

数量矩阵具有性质：1）$(kE_s)A_{sn}=A_{sn}(kE_n)=kA_{sn}$；2）数量矩阵与任意同阶矩阵作乘法都可交换；3）$kE+lE=(k+l)E$，$(kE)(lE)=(kl)E$；4）$kE$可逆$\Leftrightarrow k\neq 0$，而且当$k\neq 0$时，$(kE)^{-1}=k^{-1}E$。

三　对角矩阵、准对角矩阵

主对角线以外的其余元素全为零的n阶矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

称为对角矩阵，简记为$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$。

对角矩阵有如下运算性质：

1) $[a_1, a_2, \cdots, a_n]+[b_1, b_2, \cdots, b_n]$
$=[a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n]$；

2) $[a_1, a_2, \cdots, a_n][b_1, b_2, \cdots, b_n]=[a_1b_1, a_2b_2, \cdots, a_nb_n]$；

3) $k[a_1, a_2, \cdots, a_n]=[ka_1, ka_2, \cdots, ka_n]$；

4) $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$可逆$\Leftrightarrow a_1a_2\cdots a_n \neq 0$。当$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$可逆时，有$[a_1, a_2, \cdots, a_n]^{-1}=[a_1^{-1}, a_2^{-1}, \cdots, a_n^{-1}]$。

形如
$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}$$

的分块矩阵，其中$A_i(i=1,2,\cdots,s)$为n_i阶矩阵，称为准对角矩阵，简记为$[A_1, A_2, \cdots, A_s]$。

准对角矩阵有如下运算性质：分法相同的准对角矩阵可以相加与相乘，其结果仍是准对角矩阵。即

1) $[A_1, A_2, \cdots, A_s]+[B_1, B_2, \cdots, B_s]$
$=[A_1+B_1, A_2+B_2, \cdots, A_s+B_s]$；

2) $[A_1, A_2, \cdots, A_s][B_1, B_2, \cdots, B_s]$
$=[A_1B_1, A_2B_2, \cdots, A_sB_s]$；

3) $k[A_1, A_2, \cdots, A_s]=[kA_1, kA_2, \cdots, kA_s]$；

4) $[A_1, A_2, \cdots, A_s]$可逆$\Leftrightarrow$每个$A_i(i=1,2,\cdots,s)$都可逆。当$[A_1, A_2, \cdots, A_s]$可逆时，有$[A_1, A_2, \cdots, A_s]^{-1}=[A_1^{-1},$

$A_2^{-1},\cdots,A_s^{-1})$.

四　上（下）三角矩阵

主对角线以下（上）的元素全等于零的n阶矩阵称为上(下)三角矩阵。

上（下）三角矩阵有如下运算性质：

1）
$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & & & * \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & & & * \\ & a_{22}+b_{22} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix};$$

2）
$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & & & * \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & * \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix};$$

3）
$$k\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & & & * \\ & ka_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & ka_{nn} \end{pmatrix};$$

4）上(下)三角矩阵可逆的必要充分条件是：它的主对角线上的元素全不为零。上（下）三角矩阵的逆矩阵仍为上（下）三角矩阵：
$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & & * \\ & a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix},$$

其中，不同矩阵里的*所表示的元素未必相同。

五　对称矩阵、反对称矩阵

若$A=A'$，则称A为对称矩阵。对称矩阵的和，以及数与对称矩阵的乘积仍是对称矩阵。两个对称矩阵的积是对称矩阵当且仅当它们对乘法可交换。若对称矩阵可逆，则其逆矩阵仍是对称矩阵。

若$A=-A'$，则称A为反对称矩阵。反对称矩阵的和，以及数与反对称矩阵的乘积仍是反对称矩阵。奇数阶的反对称矩阵一定都是退化的。

任意n阶矩阵A都可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

六　幂等矩阵、幂零矩阵、幺幂矩阵

若$A^2=A$，则称A为幂等矩阵。

若有正整数k，使$A^k=0$，则称A为幂零矩阵。

若有正整数k，使$A^k=E$，则称A为幺幂矩阵。特别地，当$A^2=E$时，称A为对合矩阵。

幂等矩阵除单位矩阵外都是退化的；幂零矩阵都是退化的；幺幂矩阵都是非退化的。

Ⅶ　分块乘法的初等变换

将某个单位矩阵如下进行分块：

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}.$$

对它进行两行（列）对换；某一行（列）左乘（右乘）一个矩阵P；一行（列）加上另一行（列）的P（矩阵）倍数，就可得到如下类型的一些矩阵：

$$\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_m & P \\ 0 & E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ P & E_n \end{pmatrix}.$$

和初等矩阵与初等变换的关系一样，用这些矩阵左乘任一个分块矩阵，只要分块乘法能够进行，其结果就是对它进行相应的

变换：

$$\begin{pmatrix}0 & E_n\\E_m & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C & D\\A & B\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}P & 0\\0 & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}PA & PB\\C & D\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}E_m & 0\\P & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\PA+C & PB+D\end{pmatrix}.$$

同样地，用它们右乘任一矩阵，进行分块乘法时也有相应的结果，此处从略。

Ⅷ 广义逆矩阵

设A为$m\times n$矩阵．某个$n\times m$矩阵G，对任意n维列向量X_0及$b=AX_0$，满足$AGb=b$的必要充分条件是$AGA=A$。

设A为$m\times n$矩阵．若$n\times m$矩阵G满足$AGA=A$，则称G为A的一个广义逆矩阵，简称广义逆。

若G是A的一个广义逆，则$AX=b$有解当且仅当$AGb=b$。

当A是$n\times n$可逆矩阵时，A的广义逆G即为A的逆，即$G=A^{-1}$，从而广义逆是逆的推广。

设$m\times n$矩阵A的秩为r，且设

$$A=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}Q,$$

其中P，Q分别为$m\times m$，$n\times n$可逆矩阵，则A的全部广义逆为

$$G=Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r & C\\D & F\end{pmatrix}P^{-1},$$

其中C，D，F分别为任意的$r\times(m-r)$，$(n-r)\times r$，$(n-r)\times(m-r)$矩阵。

$m\times n$矩阵A的广义逆G唯一$\Leftrightarrow m=n$且A是可逆矩阵。

设G为$m\times n$矩阵A的任一广义逆，则，1）秩(G)$\geqslant$秩(A)；2）$s=min(m,n)$，秩(A)$=r$，则对于r与s间的任意整数t，存在A的一个广义逆G_0，使秩$(G_0)=t$；3）秩(A)=秩(AG)=秩(GA)。

设$AX=b$有解，且$b\neq 0$，则它的解的一般形式为Gb，其中G为A的任意一个广义逆。

设A为$m\times n$矩阵，G为任意给定的A的广义逆，则齐次线性方程组$AX=0$的全部解为$(E_n-GA)Z$，其中Z取遍任意n维列向量。

设G是A的一个广义逆，$AX=b$有解，则其全部解为$Gb+(E_n-GA)Z$。

§3 重点难点

本章的主题词是： $s\times n$矩阵，n阶矩阵，零矩阵，负矩阵，单位矩阵，矩阵多项式，转置矩阵；分块矩阵；初等变换，初等矩阵，换法矩阵，倍法矩阵，消法矩阵；可逆矩阵，非退化矩阵（非奇异、满秩），伴随矩阵；矩阵的等价，等价标准形；基底矩阵，数量矩阵，对角矩阵，准对角矩阵，上（下）三角矩阵，对称矩阵，反对称矩阵，幂等矩阵，幂零矩阵，幺幂矩阵，对合矩阵；广义逆矩阵。

本章的基本方法是： 矩阵乘法，分块乘法，可逆矩阵判定方法，逆矩阵公式求法，逆矩阵初等变换求法，矩阵的秩的证明方法，等价标准形求法，逆矩阵分块求法，广义逆矩阵求法，矩阵方程解法。

本章的重点是： 可逆矩阵，初等矩阵，矩阵的秩与矩阵的等价标准形。

可逆矩阵是最重要的一类矩阵，在研究矩阵时经常用到。求可逆矩阵的逆矩阵是一件基本的工作，求逆矩阵的方法（特别是初等变换法）必须熟练掌握。本章中，对于矩阵的秩、矩阵等价问题的讨论，可逆矩阵都有直接的意义。以后的各章中，对于矩阵合同、相似等问题的讨论，可逆矩阵都是必不可少的。实际上，可逆矩阵贯穿于线性代数理论的始终。因此，可逆矩阵成为本章的一个重点。

初等变换在矩阵理论的研究中有重要作用，是一种基本方法与基本步骤。而初等矩阵则把矩阵的初等变换转化为矩阵左(右)乘一初等矩阵，从而，可逆矩阵表示为初等矩阵的乘积，两矩阵等价通过初等矩阵表示为等式。因此，初等矩阵成为本章的一个重点。

矩阵的秩是矩阵自身的最基本的属性，讨论一个矩阵首先讨论其秩，而后在秩的基础上再讨论其它问题。上一章已经建立了矩阵的秩的概念，并且借助于秩的概念彻底解决了线性方程组的问题。本章中，以讨论两个矩阵乘积的秩为主，并讨论了秩的其它一些问题，得到了许多关于秩的等式与不等式。本章中，还以秩为依据建立了等价标准形与等价类的概念，为讨论矩阵作了示范。因此，矩阵的秩与矩阵的等价标准形成为本章的一个重点。

本章的难点是： 分块矩阵，初等矩阵，广义逆矩阵。

分块的想法不容易理解，分块的做法不容易掌握，尤其分块矩阵的乘法，则更为困难。因此，分块矩阵成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1）用具体例子验证分块运算的规则，以熟悉并加深理解这些规则；2）通过准对角形矩阵的运算来理解分块矩阵的运算及作用；3）通过分块求逆矩阵来认识分块矩阵的重要意义；4）将分块乘法与初等变换结合起来考虑。

初等矩阵既是本章的一个重点，又是本章的一个难点。$P(i,j)$的形状不容易想象，$P(i,j(k))$左乘与右乘引起的初等变换不同步，可逆矩阵表示为初等矩阵的乘积时因子的顺序与实际步骤不同步，等等，都造成困难。因此，初等矩阵成为本章的一个难点。解决困难的方法是：1）通过理论推导及5阶初等矩阵的实例来熟悉初等矩阵的三种类型；2）与分块矩阵相结合，详细推导左乘与右乘的规律，并用具体例子来验证。

广义逆矩阵的引入及其定义都比较难于理解，广义逆矩阵不具备唯一性，等等，因此，广义逆矩阵成为本章的一个难点，解

决困难的方法是：1）具体推导出广义逆矩阵是逆矩阵的一种推广；2）通过解线性方程组认识广义逆矩阵的意义及其引入的必然性；3）具体求出矩阵的广义逆矩阵。

§4 习题类解

I 计算题

一 求给定矩阵的和、差、积及混合运算

根据矩阵的和、差、积等的定义，进行运算，求得所要的结果。

例1 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}$，

求AB，BA，A^2，$A^2-5A+2E$。

解 $AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}10 & 5\\ -20 & -10\end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，

$$A^2-5A+2E=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10 & -5\\ 20 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -5\\ 20 & 12\end{pmatrix},$$

例2 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}b_1 & 0\\ 0 & b_2\end{pmatrix}$，

$C=\begin{pmatrix}c_1 & 0 & 0\\ 0 & c_2 & 0\\ 0 & 0 & c_3\end{pmatrix}$，求BA，AC。

解 $$BA=\begin{pmatrix}b_1a_{11} & b_1a_{12} & b_1a_{13}\\ b_2a_{21} & b_2a_{22} & b_2a_{23}\end{pmatrix},$$

$$AC=\begin{pmatrix}a_{11}c_1 & a_{12}c_2 & a_{13}c_3\\ a_{21}c_1 & a_{22}c_2 & a_{23}c_3\end{pmatrix}.$$

说明 本例可以推广为：以对角矩阵左乘（右乘）矩阵A，其积就是以对角矩阵的主对角线上的元素依次乘以A的各行（列）。

例3 求 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$.

分析 先找出规律，再用数学归纳法证明。

解1 $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$，

从而 $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$。用数学归纳法证明。当$n=1$时成立。设$n=k$时成立，则$n=k+1$时，有

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&k+1\\0&1\end{pmatrix}.$$

解2 因为 $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，

所以 $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^n+c_n^1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$+c_n^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2+\cdots+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$.

说明 本例可推广为

$$\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\cdots0&0\\0&\lambda&1&0\cdots0&0\\0&0&\lambda&1\cdots0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0\cdots\lambda&1\\0&0&0&0\cdots0&\lambda\end{pmatrix}_{mm}^n=\begin{pmatrix}\lambda^n&c_n^1\lambda^{n-1}&c_n^2\lambda^{n-2}\cdots c_n^{m-1}\lambda^{n-m+1}\\0&\lambda^n&c_n^1\lambda^{n-1}\cdots c_n^{m-2}\lambda^{n-m+2}\\\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0\quad\cdots c_n^1\lambda^{n-1}\\0&0&0\quad\cdots\quad\lambda^n\end{pmatrix}$$

$(n\geqslant m-1)$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^n&c_n^1\lambda^{n-1}&c_n^2\lambda^{n-2}\cdots c_n^{n-1}\lambda&1&0&0\cdots0\\0&\lambda^n&c_n^1\lambda^{n-1}\cdots c_n^{n-2}\lambda^2&c_n^{n-1}&1&0\cdots0\\\cdots&\cdots&\cdots\quad\cdots\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\cdots\\0&0&0\quad\cdots0&0&0&\cdots\quad c_n^1\lambda^{n-1}\\0&0&0\quad\cdots0&0&0&0\quad\lambda^n\end{pmatrix}$$

$(2\leqslant n<m-1)$.

二 求与给定矩阵可交换的矩阵

求与给定矩阵A可交换的矩阵B，将B的元素作为未知量，由AB＝BA得到方程组，而后求解方程组即可。

例4 求与 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可交换的矩阵。

解 与A可交换的矩阵B一定是3阶矩阵。

设 $B=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix}$，

则由AB＝BA 得：$x_1=x_5=x_9$，$x_3=x_4=x_8$，$x_2=x_6=x_7$，

所以 $B=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$，其中$a$，$b$，$c$为任意数.

三 求可逆矩阵的逆矩阵

当可逆矩阵A是具体的数字矩阵时，按§2中Ⅳ，四，所述的方法去做．当可逆矩阵是分块矩阵时，可以将逆矩阵设为分法相同的分块矩阵，而后求出各未知的块。

例5 求可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&0\\-1&0&-2\end{pmatrix}$

的逆矩阵。

解1 因为$|A|=9$，并且，$A_{11}=-2$，$A_{12}=6$，$A_{13}=1$，$A_{21}=4$，$A_{22}=-3$，$A_{23}=-2$，$A_{31}=1$，$A_{32}=-3$，$A_{33}=-5$，所以

$$A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2&4&1\\6&-3&-3\\1&-2&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{9}&\frac{4}{9}&\frac{1}{9}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&-\frac{5}{9}\end{pmatrix}.$$

解 2　$(AE)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{[2+1(-3)],\ [3+1(1)]}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\left[2\left(-\frac{1}{5}\right)\right]}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{[1+2(-2)],\ [3+2(-2)]}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\left[3\left(-\frac{5}{9}\right)\right]}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\left[1+3\left(-\frac{1}{5}\right)\right],\ \left[2+3\left(\frac{3}{5}\right)\right]}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \end{array}\right),$$

所以　$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix}.$

解 3

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{[2+1(-2)] \\ [3+1(1)]}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\left[2\left(-\frac{1}{5}\right)\right]]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & -\frac{2}{5} & -3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{[1+2(-3)] \\ [3+2(-3)]}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\left[3\left(-\frac{5}{9}\right)\right]]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{9} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{9} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\left[1+3\left(-\frac{1}{5}\right)\right] \\ \left[2+3\left(\frac{2}{5}\right)\right]}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix}$.

解 4

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & & & \\
0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right)
\xrightarrow[\substack{\{2+1(-2)\}\\ \{3+1(1)\}}]{\substack{\{3+1(1)\}\\ \{2+1(-3)\}}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -5 & 3 & -3 & 1 & 0 \\
0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -2 & 1 & & & \\
0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\left[2\left(-\frac{1}{5}\right)\right]}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\
0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -2 & 1 & & & \\
0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\left[3+2\left(\frac{3}{5}\right)\right]]{\{3+2(-2)\}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\
\hline
1 & -2 & -\frac{1}{5} & & & \\
0 & 1 & \frac{3}{5} & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\left[3\left(-\frac{5}{9}\right)\right]}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \\
\hline
1 & -2 & -\frac{1}{5} & & & \\
0 & 1 & \frac{3}{5} & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right),
$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -\frac{1}{5}\\ 0 & 1 & \frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9}\end{pmatrix}.$$

说明 1) $\xrightarrow{[3(-4)]}$表示第3行乘以－4，$\xrightarrow{[3+2(-2)]}$表示第2行的－2倍加到第3行，$\xrightarrow{[1,2]}$表示交换第1行与第2行；2) $\xrightarrow[{[3(-2)]}]{}$，$\xrightarrow[{[3+1(1)]}]{}$，$\xrightarrow[{[1,2]}]{}$ 表示相应的列变换；3) $\xrightarrow[{[3+1(1)]}]{[3+1(2)]}$，要先列变换，再行变换。

例6 设 $X=\begin{pmatrix}0 & A\\ C & 0\end{pmatrix}$，且$A^{-1}$，$C^{-1}$存在，求$X^{-1}$.

解 设 $X^{-1}=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}$,

并且，X^{-1}的分块可与X相乘，则由$X^{-1}X=E$得到

$$\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & A\\ C & 0\end{pmatrix}=E,\ \begin{pmatrix}X_{12}C & X_{11}A\\ X_{22}C & X_{21}A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_1 & 0\\ 0 & E_2\end{pmatrix},$$

$X_{12}C=E_1$，$X_{11}A=0$，$X_{22}C=0$，$X_{21}A=E_2$，所以，$X_{12}=C^{-1}$，$X_{11}=0$，$X_{22}=0$，$X_{21}=A^{-1}$，并且容易验证，成立$X^{-1}X=E$，因此

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}0 & C^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}.$$

四 求矩阵的等价标准形

求$m\times n$矩阵A的等价标准形B，可以如下变化

$$\begin{pmatrix} A & \vdots & E_m \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ E_n & \vdots & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} B & \vdots & P \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Q & \vdots & \end{pmatrix}$$

则有$PAQ=B$。

例 7 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，

求可逆矩阵P，Q，使PAQ为A的等价标准形。

解 $\begin{pmatrix} A & \vdots & E_5 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ E_3 & \vdots & \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[\substack{(2+1(-2)) \\ (3+2(-1)+1(-1)) \\ (4+2(-1)+1(1)) \\ (5+2(-2))}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \end{array}\right)$$

$$
\xrightarrow[\substack{[2+1(-2)]\\ [3+1(-3)]\\ [3+2(-\frac{4}{3})]\\ [2(-\frac{1}{3})]}]{}
\left(\begin{array}{ccc:ccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\
\hdashline
1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & & & & & \\
0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & & &
\end{array}\right)
$$

所以 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$
PAQ=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

五 解矩阵方程

若A，B是已知矩阵，X是未知矩阵，则$AX=B$，$XA=B$称为矩阵方程。解矩阵方程的一般方法是：将X的元素作为未知量，根据矩阵乘法与矩阵相等的概念，得到线性方程组，解线性方程组即得到X。当A是可逆矩阵时，由$AX=B$ 得 $X=A^{-1}B$，用初等变换得

$$
(AB)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\ \ A^{-1}B)\text{，即}(E\ X)\text{；}
$$

由$XA=B$得$X=BA^{-1}$，用初等变换得

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}E\\BA^{-1}\end{pmatrix}，即\begin{pmatrix}E\\X\end{pmatrix}.$$

例 8 解矩阵方程

$$\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}.$$

解 1 由条件知，X必为2阶矩阵，所以，设

$$X=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix},$$

则由
$$\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$$

得，$2x_1+5x_3=4$，$2x_2+5x_4=-6$，$x_1+3x_3=2$，$x_2+3x_4=1$，解得$x_1=2$，$x_2=-23$，$x_3=0$，$x_4=8$，因此

$$X=\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}.$$

解 2 $$\left(\begin{array}{cc:cc}2&5&4&-6\\1&3&2&1\end{array}\right)\xrightarrow{[1,2]}\left(\begin{array}{cc:cc}1&3&2&1\\2&5&4&-6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{[2+1(-2)]}\left(\begin{array}{cc:cc}1&3&2&1\\0&-1&0&-8\end{array}\right)\xrightarrow{[2(-1)]}\left(\begin{array}{cc:cc}1&3&2&1\\0&1&0&8\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{[1+2(-3)]}\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&2&-23\\0&1&0&8\end{array}\right),$$

所以
$$X=\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}.$$

六 求广义逆矩阵

求$m\times n$矩阵A的广义逆矩阵，求得可逆矩阵P，Q，使PAQ为A的等价标准形，记A的秩为r，则A的广义逆矩阵为

$$G=Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r&C_{r\times(m-r)}\\D_{(n-r)\times r}&F_{(n-r)\times(m-r)}\end{pmatrix}P^{-1}.$$

例 9 矩阵A如例7，求A的广义逆矩阵.

解 按例7求得P，Q，则A的广义逆矩阵

$$G=\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\left(\begin{array}{cc:ccc}1&0&a_1&a_2&a_3\\0&1&a_4&a_5&a_6\\ \hdashline a_7&a_8&a_9&a_{10}&a_{11}\end{array}\right)\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-2&1&0&0&0\\-1&-1&1&0&0\\1&-1&0&1&0\\0&-2&0&0&1\end{pmatrix}^{-1},$$

其中a_i为任意的数。

Ⅱ 证明题

一 矩阵的等式

根据矩阵相等的定义及矩阵的运算进行证明，特别地，证明矩阵$A=0$，就是要证明A的每个元素均为0。

例 1 设A是n阶矩阵，且对于任一n维向量$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，均有$AX=0$，证明$A=0$。

证明 设$A=(a_{ij})$，取$X=(1,0,\cdots,0)'$得，$(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1})'=(0,0,\cdots,0)'$，所以$a_{11}=a_{21}=\cdots=a_{n1}=0$。同样地，$a_{12}=a_{22}=\cdots=a_{n2}=0$，…，$a_{1n}=a_{2n}=\cdots=a_{nn}=0$，因此$A=0$。

例 2 证明：任一n阶矩阵A均可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

分析 用待定法．设$A=X+Y$，其中X为对称矩阵，Y为反对称矩阵，则$A'=X'+Y'=X-Y$，从而求得$X=\frac{1}{2}(A+A')$，$Y=\frac{1}{2}(A-A')$，得到证明。

证明 作n阶矩阵$B=\frac{1}{2}(A+A')$，$C=\frac{1}{2}(A-A')$，则$B'=B$，$C'=-C$，并且$A=B+C$，得证。

二 可逆矩阵与初等矩阵

根据可逆矩阵、初等矩阵的概念、性质以及二者之间的关系，进行证明。

例 3 证明：若$A^k=0$，$k>1$，则矩阵$E-A$是可逆矩阵，并且$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$。

证明 因为$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E-A^k=E-0=E$，所以，由矩阵可逆的性质得，$E-A$是可逆矩阵，并且，$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$。

例 4 设A是可逆矩阵，并且A的各行元素之和均等于常数a。证明：1）$a\neq 0$，2）A^{-1}的各行元素之和均等于a^{-1}。

证明 将A与A^{-1}均按列分块写为：$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)$，$A^{-1}=(\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_n)$。

1）由条件知，$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=(aa\cdots a)'$，从而必有$a\neq 0$。否则，$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0$，A的列向量线性相关，从而A的秩小于$n$，A不可逆，引出矛盾。

2）由$A^{-1}A=E$得$A^{-1}\alpha_j=\varepsilon_j$，$j=1,2,\cdots,n$，其中$\varepsilon_j$的第$j$个分量为1，其余分量均为0。从而

$$\begin{aligned}A^{-1}(aa\cdots a)'&=A^{-1}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\\&=A^{-1}\alpha_1+A^{-1}\alpha_2+\cdots+A^{-1}\alpha_n\\&=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n=(1\ 1\ \cdots 1)',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^{-1}(aa\cdots a)'&=(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)(aa\cdots a)'\\&=a\beta_1+a\beta_2+\cdots+a\beta_n=a(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n),\end{aligned}$$

所以 $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n=a^{-1}(1\ 1\ \cdots\ 1)'=(a^{-1}a^{-1}\cdots a^{-1})'$

因此，A^{-1}的各行元素之和均等于a^{-1}。

例 5 设 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，$ad-bc=1$。

证明：A可以表成消法矩阵的乘积。

证明 因为$ad-bc=1$，所以a，c不能同时为0。当 $a\neq 0$

时，作如下初等变换

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\xrightarrow{[2+1(-c/a)]}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow{[1+2(-ab)]}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2+1(a^{-1})]}\begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & a^{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow{[1+2(1-a)]}\begin{pmatrix}1 & a^{-1}-1\\ 1 & a^{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow{[2+1(-1)]}\begin{pmatrix}1 & a^{-1}-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

用初等矩阵的乘法形式写为

$P(2,(-1))P(1,2(1-a))P(2,1(a^{-1}))\ P(1,2(-ab))$

$P(2,1(-\frac{c}{a}))A=\begin{pmatrix}1 & a^{-1}-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

所以 $A=P(2,1(\frac{c}{a}))P(1,2(ab))P(2,1(-a^{-1}))P(1,2(a-1))$

$P(2,1(1))P(1,2(a^{-1}-1))$.

当$a=0$时，则 $c\neq0$，且$bc=-1$，$b=-c^{-1}$，类似地得到

$A=P(1,2(-c^{-1}))P(2,1(c))P(1,2(c^{-1}(d-1)))$.

三　矩阵的秩

先列出下面的

基本事实：设A，B是矩阵．若$AB=0$，则B的列向量均为齐次线性方程组$AX=0$的解，A的行向量均为齐次线性方程组$B'X=0$的解。

由基本事实出发，利用齐次线性方程组关于基础解系的结论，可以很自然地统一地解决一类关于矩阵的秩的问题。

另外，关于矩阵的秩，有一些通常的关系式：等式或不等式，常常利用这些关系式证明关于矩阵的秩的问题。

例 6　设A为$m\times n$矩阵，B为$n\times s$矩阵．证明：若$AB=0$，则秩（A）+秩（B）$\leqslant n$。

证明　由$AB=0$知，B的任一列向量均为齐次线性方程组$AX=0$的解。

当秩（A）$=n$时，$AX=0$仅有零解，从而B的任一列向量均为零向量，$B=0$，秩（B）$=0$，结论成立。

当秩（A）$=r<n$时，$AX=0$的基础解系存在，且含有$n-r$个解向量，从而B的列向量组的极大无关组至多含有$n-r$个向量，即秩（B）$\leqslant n-r$，结论也成立。

因此，秩（A）+秩（B）$\leqslant n$。

例 7 若A是n阶矩阵（$n\geqslant 2$），则

$$\text{秩}(A^*)=\begin{cases} n, & \text{当秩}(A)=n; \\ 1, & \text{当秩}(A)=n-1; \\ 0, & \text{当秩}(A)<n-1. \end{cases}$$

证明 直接相乘得$AA^*=|A|E$。

当秩（A）$=n$时，$|A|\neq 0$，由$|A||A^*|=||A|E|=|A|^n$知，$|A^*|\neq 0$，从而秩（A^*）$=n$。

当秩（A）$=n-1$时，$|A|=0$，从而$AA^*=0$，且A^*有非零的列向量，由于$AX=0$的基础解系由一个解向量组成，而A^*的列向量均为$AX=0$的解，所以秩（A^*）$=1$。

当秩（A）$<n-1$时，A的非零子式的最大阶数$<n-1$，从而$A^*=0$，秩（A^*）$=0$。

例 8 设A，B，C均为n阶矩阵。证明：若秩（C）$=n$，$A(BA+C)=0$，则秩（A）+秩（$BA+C$）$=n$。

证明 与例6相同，证得秩（A）+秩（$BA+C$）$\leqslant n$。因为，$C=(BA+C)+(-BA)$，又，秩$(C)=n$，秩（$-BA$）$\leqslant$秩（A），所以，秩(A)+秩（$BA+C$）$\geqslant n$。因此，秩(A)+秩（$BA+C$）$=n$。

例 9 设$A=(a_{ij})_{sn}$，$B=(b_{ij})_{nm}$，证明：秩$(AB)\geqslant$秩(A)+秩（B）$-n$。

证明 设A的秩为r，则有可逆矩阵P，Q，使$A=PA_1Q$，其中A_1的$(1,1),(2,2),\cdots,(r,r)$元素均为1，而其余元素均为0。

对于任意矩阵$C=(c_{ij})_{nm}$，A_1C的第1至第r行与C相同，而其余的行均为0，从而，由矩阵的秩的定义得，秩$(A_1C)\geqslant$

秩(C)$-(n-r)$。再由关于矩阵乘积的秩的定理，得到

$$\begin{aligned}秩(AB)&=秩(P(A_1QB))\\&=秩(A_1QB)\geqslant 秩(QB)-(n-r)\\&=秩(B)-(n-r)=秩(A)+(B)-n.\end{aligned}$$

四　特殊矩阵

根据特殊矩阵的概念及性质，进行证明.

例10　设A，B均为n阶对称矩阵，证明：AB是对称矩阵$\Leftrightarrow$ $AB=BA$。

证明　$\Rightarrow$。$(AB)'=B'A'=BA,(AB)'=AB,\ AB=BA,$

$\Leftarrow$。$(AB)'=B'A'=BA=AB$，AB是对称矩阵。

例11　若A是反对称矩阵，且A可逆，则A^{-1}也是反对称矩阵。

证明　因为$A'(-A^{-1})=(-A)(-A^{-1})=E$，所以$(A')^{-1}=-A^{-1}$。又，$(A^{-1})'=(A')^{-1}$，所以，$(A^{-1})'=-A^{-1}$. 因此，$A^{-1}$也是反对称矩阵。

五　行列式

有一类行列式是分块矩阵的行列式，证明这类行列式可以用分块矩阵以及分块乘法的初等变换来做.更一般的论述见§5，Ⅱ.

例12　设A,B,C,D都是n阶矩阵，并且$|A|\neq 0$，$AC=CA$.

证明：

$$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

分析　考虑矩阵$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$，引入$\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}$。设

$$\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{pmatrix},$$

则 $$\begin{pmatrix}X_{11}A+X_{12}C & X_{11}B+X_{12}D\\ X_{21}A+X_{22}C & X_{21}B+X_{22}D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{pmatrix},$$

$$X_{11}A+X_{12}C=Y_{11},\quad X_{11}B+X_{12}D=Y_{12},$$

$$X_{21}A+X_{22}C=Y_{21},\quad X_{21}B+X_{22}D=Y_{22}.$$

要使$Y_{22}=AD-CB$，就要$X_{22}=A$，$X_{21}=-C$，此时，由AC

$=CA$得$Y_{21}=0$。要使$Y_{11}=E$，就要$X_{12}=0$，$X_{11}=A^{-1}$，此时$Y_{12}=A^{-1}B$。从而就有

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ 0 & AD-CB \end{pmatrix}.$$

两边取行列式，即得到证明。

证明 直接验证，并利用条件，可得

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ 0 & AD-CB \end{pmatrix}.$$

两边取行列式，并利用行列式的展开定理，得

$$\begin{vmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C & A \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E & A^{-1}B \\ 0 & AD-CB \end{vmatrix},$$

$$|A^{-1}|\,|A|\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|E|\,|AD-CB|,$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

例13 设A，B都是n阶实数矩阵，证明：$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix}\geqslant 0$。

证明 在复数域上考虑问题，应用分块乘法的初等变换，得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ iA+i^2B & A+iB \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & A+iB \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & B \\ iE & E \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & A+iB \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A-iB & 0 \\ iE & E \end{vmatrix}$$

$$=|A-iB|\,|A+iB|=\overline{|A+iB|}\,|A+iB|\geqslant 0.$$

六　广义逆矩阵

根据广义逆矩阵的概念及性质，进行证明。

例14 设A是$m\times n$矩阵，G是A的一个广义逆矩阵，证明：

1）秩（A）+秩（E_m-AG）$=m$；

2）秩（A）+秩（E_n-GA）$=n$。

证明 1）由于G是A的一个广义逆矩阵，所以$AGA=A$。从而，由秩(A)=秩(AGA)≤秩(AG)≤秩(A)得，秩(A)=秩(AG)。

又，$(AG)(E_m-AG)=AG-AGAG=0$，所以，与例6相同，可证得秩(A)+秩$(E_m-AG)\leqslant m$。但是秩(AG)+秩$(E_m-AG)\geqslant$秩$(AG+E_m-AG)$=秩$(E_m)=m$。

因此，秩(A)+秩$(E_m-AG)=m$。

2）类似于1）可以证明，从略。

说明 本例用了关于矩阵秩的一些关系式。

§5 补充资料

Ⅰ 置换矩阵

定义．设P是n阶矩阵．若P的每行每列元素中恰有一个为1，而其余元素均为0，则称P为n阶置换矩阵．当P的$(1,i_1)$，$(2,i_2)$，…，(n,i_n)元素为1时，记为$P=P\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ i_1 & i_2\cdots i_n\end{pmatrix}$．

定理．$n(n>1)$阶矩阵P是置换矩阵的必要充分条件是P为n阶换法矩阵的乘积．

推论．置换矩阵的行列式等于+1或-1．

定理．用$P=P\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ i_1 & i_2\cdots i_n\end{pmatrix}$左乘A，相当于第$i_1$行变为第1行，第$i_2$行变为第2行，…，第$i_n$行变为第$n$行，由A得到PA；右乘B，相当于第1列变为第$i_1$列，第2列变为第$i_2$列，…，第$n$列变为第$i_n$列，由B得到BP．

Ⅱ 行列式降阶计算法

第一降阶定理．设A是n阶可逆矩阵，D是m阶矩阵，M是$m+n$阶矩阵，则

$$|M|=\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|=|A|\cdot|M/A|,$$

其中$M/A=D-CA^{-1}B$，称为Schur补．

设A是n阶可逆矩阵，D是m阶矩阵，B是$n\times m$矩阵，C是$m\times n$矩阵，则有如下的升降公式

$$|D-CA^{-1}B|=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}.$$

设A，B，C，D为同阶矩阵.若A是可逆矩阵,且 $AC=CA$，则

$$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

设A是n阶矩阵，D是m阶可逆矩阵，M是$m+n$阶矩阵，则

$$|M|=\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|D|\cdot|A-BD^{-1}C|.$$

第二降阶定理。设A与D分别为n阶与m阶可逆矩阵,B与C分别为$n\times m$矩阵与$m\times n$矩阵，则

$$|D-CA^{-1}B|=\frac{|D|}{|A|}\cdot|A-BD^{-1}C|.$$

Laplace定理。设A是n阶矩阵，在$|A|$中任意取定k个列，其列号适合$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$，则

$$|A|=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}M\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\overline{M}\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}.$$

设A是任一n阶矩阵，则

$$|\lambda E_n+A|=\lambda^n+\left(\sum_{i_1=1}^{n}M\begin{pmatrix}i_1\\ i_1\end{pmatrix}\right)\lambda^{n-1}+\left(\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}M\begin{pmatrix}i_1 i_2\\ i_1 i_2\end{pmatrix}\right)\lambda^{n-2}$$

$$+\cdots+\left(\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\leqslant n}M\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_{n-1}\\ i_1 i_2\cdots i_{n-1}\end{pmatrix}\right)\lambda+|A|.$$

Cauchy-Binet公式。设A是$n\times m$矩阵，B是$m\times n$矩阵，则

1）当$n>m$时，恒有$|AB|=0$，

2）当$n\leqslant m$时，成立

$$|AB|=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_n\leqslant m}M_A\begin{pmatrix}1\ 2\cdots n\\ j_1 j_2\cdots j_n\end{pmatrix}M_B\begin{pmatrix}j_1 j_2\cdots j_n\\ 1\ 2\cdots n\end{pmatrix},$$

其中M_A与M_B分别表示A与B的子式。

设$C=AB$，而A是$m\times n$矩阵，B是$n\times l$矩阵，则当 $k>n$ 时

$$M_C\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}=0，而当k\leqslant n时\quad M_C\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}=$$

$$\sum_{1\leqslant s_1<\cdots<s_k\leqslant n} M_A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_k \end{pmatrix} M_B\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}。$$

第三降阶定理．设n阶矩阵A的k阶顺序主子式

$$\Delta_k = M\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} \neq 0，\quad 1\leqslant k\leqslant n-1,$$

记 $$D_{ij} = M\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & i \\ 1 & 2 & \cdots & k & j \end{pmatrix},\quad i,j=k+1,k+2,\cdots,n,$$

则 $$|A| = \frac{1}{\Delta_k^{n-k-1}} \begin{vmatrix} D_{k+1,k+1} & D_{k+1,k+2} & \cdots & D_{k+1,n} \\ D_{k+2,k+1} & D_{k+2,k+2} & \cdots & D_{k+2,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ D_{n,k+1} & D_{n,k+2} & \cdots & D_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ⅲ 矩阵的直积

设 $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix},$$

则称 $$A\times B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix},$$

$$B\times A=\begin{pmatrix} b_{11}A & b_{12}A & \cdots & b_{1m}A \\ b_{21}A & b_{22}A & \cdots & b_{2m}A \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1}A & b_{m2}A & \cdots & b_{mm}A \end{pmatrix}$$

分别为A与B的直积，B与A的直积．

直积具有下列性质：

1）$E_n\times E_m=E_{mn}=E_m\times E_n$．

2）$(A\times B)'=A'\times B'$．

3）若A与C为同阶矩阵，B与D也为同阶矩阵，则

$$(A\times B)\cdot(C\times D)=AC\times BD.$$

4）若A与B都是对角矩阵，则$A\times B$也是对角矩阵。

5）设A与B是同型的（指同为上三角，或同为下三角）三角矩阵，则$A\times B$也是同型的三角矩阵。

6）$(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$。

7）若A与B均是对称矩阵，则$A\times B$也是对称矩阵。

8）若A为n阶矩阵，B为m阶矩阵，则$|A\times B|=|A|^m\cdot|B|^n$，

9）$A\times B$可逆的必要充分条件是A与B均可逆，并且$(A\times B)^{-1}=A^{-1}\times B^{-1}$。

10）$A\times B$的秩等于A的秩与B的秩的乘积。

11）$(\lambda A)\times B=A\times(\lambda B)=\lambda(A\times B)$，$\lambda$为任何数。

12）$(A+B)\times C=A\times C+B\times C$，　$A\times(B+C)=A\times B+A\times C$。

Ⅳ　复合矩阵

一个n阶矩阵A的所有k阶子式共$(c_n^k)^2$个，将它们按下面的方法排列成为一个c_n^k阶矩阵$A^{(k)}$：1）凡由A的某k个行所组成的c_n^k个k阶子式为$A^{(k)}$的同一行的元素；2）凡由A的某k列所组成的c_n^k个k阶子式为$A^{(k)}$的同一列的元素；3）$A^{(k)}$的第一，二，…，直到第c_n^k行（列）都按照字典的次序排列（如$A^{(2)}$中，由第一、二行组成的子式排在第一行，在由第一、三，一、四行等组成的子式之前，而由第二、三行组成的子式则排在由第一、n行组成的子式之后，…），称$A^{(k)}$为A的第k次复合矩阵。

复合矩阵具有下列性质：

1）$E_n^{(k)}=E_{c_n^k}$。

2）若$D=[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$，则$D^{(k)}=[p_1,p_2,\cdots,p_{c_n^k}]$，其中$p_i$为$k$个$\lambda_j$之积。

3）若$D=aE_n$，则$D^{(k)}=a^kE_{c_n^k}$。

4) $(A^{(k)})'=(A')^{(k)}$.

5) 若A是对称矩阵，则 $A^{(k)}$ 也是对称矩阵。

6) 若$A_1,A_2,\cdots,A_t$ 为同阶矩阵，则 $(A_1A_2\cdots A_t)^{(k)}=A_1^{(k)}\cdots A_t^{(k)}$.

7) $A^{(k)}$ 为可逆矩阵的必要充分条件是A为可逆矩阵，并且 $(A^{(k)})^{-1}=(A^{-1})^{(k)}$.

8) 若秩$(A)=r$，则当$k\leqslant r$时，秩$(A^{(k)})=c_k^r$，而当 $k>r$ 时，秩$(A^{(k)})=0$.

9) 上（下）三角矩阵A的复合矩阵$A^{(k)}$也是上（下）三角矩阵，其主对角线上元素等于A的主对角线上k个元素的乘积。

10) 若A为n阶矩阵，则 $|A^{(k)}|=|A|^{c_{n-1}^{k-1}}$.

V Moore—Penrose逆与Drazin逆

一 Moore—Penrose逆

设A是$n\times m$实矩阵。若存在$m\times n$矩阵X，使得：1) $AXA=A$，2) $XAX=X$，3) $(AX)'=AX$，4) $(XA)'=XA$，则称X是A的一个Moore-Penrose逆。

对于任意的$n\times m$实矩阵A，A 的Moore-Penrose 逆均存在且唯一，记为A^+.

Moore-Penrose 逆具有下列性质：1) $(A^+)^+=A$，2) $(A')^+=(A^+)'$，3) $A^+=(A'A)^+A'=A'(AA')^+$，4) $(A'A)^+=A^+(A')^+$.

二 Drazin逆

设A是n阶实矩阵，使秩(A^m)＝秩(A^{m+1})成立的最小非负整数m，称为A的指数，记为$\mathrm{Ind}A=m$。

任意n阶实矩阵A的指数均存在且唯一。

$\mathrm{Ind}A=0\Leftrightarrow$A是$n$阶实矩阵，且$A^{-1}$存在。

设A是n阶矩阵，$\mathrm{Ind}A=m$。若存在n阶矩阵X，使得：1)

$AX=XA$; 2) $AX^2=X$, 3) $A^{m+1}X=A^m$, 则称X是A的一个Drazin逆。

对于任意的n阶实矩阵A，A的Drazin逆均存在且唯一，记为A^D。

Drazin逆具有下列性质：1) $\mathrm{Ind}A^D\leqslant 1$, 2) $(A')^D=(A^D)'$, 3) 对任意自然数s，有$(A^s)^D=(A^D)^s$, 4) $\mathrm{Ind}A\leqslant 1\Leftrightarrow(A^D)^D=A$, 5) $((A^D)^D)^D=A^D$, 6) $A^D=A^+\Leftrightarrow AA^+=A^+A$.

Ⅵ 高矩阵

秩数等于列数的矩阵称为高矩阵。

这样的矩阵的行数不可能小于列数，而只能大于或等于列数，其外表有“高”的形式，所以称为高矩阵。

下列三命题等价：1) $G_{m\times r}$是一个高矩阵，2) 有高矩阵H，使$(G\ H)$为可逆矩阵，3) 有高矩阵K，使$K'G=E$。

若$G_{m\times r}$为高矩阵，则有高矩阵$H_{m\times(m-r)}$使$G'H=0$；又若有$G'X=0$，而X的列数$>m-r$，则X一定不是高矩阵。

若G，H均为高矩阵，则对于任意矩阵A，只要可以相乘，就有秩(A)=秩(GA)=秩(AH')=秩(GAH')。

设A为任意矩阵，则秩(A)$=r$的必要充分条件是有两个秩数为r的高矩阵G，H，使$A=GH'$。

若高矩阵G，H，G_1，H_1满足等式$GH'=G_1H_1'$，则必有可逆矩阵P，使$GP=G_1$，$P^{-1}H'=H_1'$。

应用高矩阵来处理一些矩阵问题，所得的结果，有些在多元统计分析中是很有用的。

Ⅶ 矩阵分析

设有矩阵序列$\{A_m\}$。若A_m的每个元素当$m\to\infty$时以A的对应位置的元素为极限，则称$\{A_m\}$收敛于矩阵A，记为$A_m\to A$或$\lim\limits_{m\to\infty}A_m=A$，A称为$\{A_m\}$的极限。不收敛的矩阵序列称为发

散的。

若当$m\to\infty$时，$A_m\to A$，$B_m\to B$，则当$m\to\infty$时，$\alpha A_m+\beta B_m\to\alpha A+\beta B$，$A_mB_m\to AB$，其中$\alpha$，$\beta$为任何的数。

对于任意n阶矩阵$A=(a_{ij})$，$\|A\|=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$ 称为 A 的范数。

设A_m是n阶矩阵，则$\lim\limits_{m\to\infty}A_m=0$当且仅当$\lim\limits_{m\to\infty}\|A_m\|=0$。

给定了矩阵级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_m$，并设$S_N=\sum\limits_{m=1}^{N}A_m$。若矩阵序列$\{S_N\}$收敛而有极限S，则称级数$\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_m$收敛并有和S，记为 $S=\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_m$，不收敛的矩阵级数称为发散的。

在 $S=\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_m$中，这里$A_m$是$n$阶矩阵，若$n^2$个对应位置的元素构成的$n^2$个数项级数都是绝对收敛的，则称$\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_m$是绝对收敛的。

若幂级数$\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_mz^m$在整个复平面内是收敛的，则对于任意$n$阶矩阵A，矩阵幂级数$\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_mA^m$都是绝对收敛的。

设A是n阶矩阵，则级数$e^A=E+A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\cdots$，$\cos A=E-\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{4!}A^4-\cdots$，$\sin A=A-\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{5!}A^5-\cdots$ 都是绝对收敛的。并且，$e^{iA}=\cos A+i\sin A$，$\cos A=\frac{1}{2}(e^{iA}+e^{-iA})$，$\sin A=\frac{1}{2i}(e^{iA}-e^{-iA})$，$\cos(-A)=\cos A$，$\sin(-A)=-\sin A$。

Ⅷ 历史资料点滴

“矩阵”这个词是英国著名数学家西勒维斯特(1814,9,3—1897,3,15)于1850年首先使用的。他用来指组成行列式的数字阵列而又不是行列式本身。实际上，矩阵的基本性质也是在行列式理论的发展中建立起来的，这正如英国著名数学家凯莱(1821,8,16—1895)在其1885年的一篇文章中所写的：在逻辑上，矩阵的概念先于行列式的概念，而在历史上次序正相反。

凯莱首先研究矩阵本身并发表了一系列文章，所以他被认为是矩阵论的首创者。他于1855年首先引进矩阵以简化记号。他于1858年发表了这个课题的头一篇重要文章《矩阵论的研究报导》，定义了矩阵相等，零矩阵，单位矩阵，矩阵的加法，数与矩阵的乘法。他直接从两个相继变换的效应的表示作出两个矩阵乘法的定义，在这篇文章中，他还叙述了逆矩阵，并列出了求3阶矩阵的逆矩阵公式；他还叙述了转置矩阵，给出了 $(LMN)'=N'M'L'$，但没有证明。

矩阵的秩的概念是由德国著名数学家弗罗宾纽斯(1849,10,26—1917,8,3)于1879年引进的。他指出，一个矩阵的秩为r当且仅当它至少有一个r阶子式不为零而所有高于r阶的子式都为零。

1955年，彭诺斯对任意$n\times m$复数矩阵A引入Moore-Penrose广义逆；1958年，Drazin对于n阶矩阵A引入Drazin广义逆。广义逆在最小二乘法等问题中有很多应用，现在仍为人们所研究。

行列式和矩阵两者都已经被推广到了无限阶，并且，十九世纪末和二十世纪初的研究，其元素已由数而推广为一般的抽象域中的元素。

总之，从十九世纪中叶以来，矩阵一直是代数学的一个分支。但是，直到二十世纪二十年代，矩阵才成为量子力学的工具。现在，矩阵成为普通数学教育的一部分，它在数值分析与所有其它应用数学分支中都有着广泛的应用。

§6 基本习题

1　计算 $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}^n$.

2　设　$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，求所有与A可交换的矩阵.

3　设　$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$，试用两种方法求A的逆矩阵.

4　解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5　设　$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵P，Q，使PAQ为A的等价标准形，并求出A的广义逆.

6　证明：与对角矩阵可交换的矩阵必为对角矩阵.

7　证明：若A是n阶对称矩阵，B是n阶反对称矩阵，则AB是反对称矩阵⇔AB＝BA.

8　设A是n阶矩阵．证明：若有非零n阶矩阵B，使AB＝0，则必有n阶非零矩阵C，使CA＝0.

9　证明：E－AB可逆⇔E－BA可逆.

10　证明：若A是n阶幂等矩阵，则秩(A)＋秩(E－A)＝n.

第五章 二 次 型

§1 概括说明

二次型的理论起源于解析几何中化二次曲线和二次曲面的方程为标准形式的问题。它在解析几何、数学分析、微分方程、数理统计等数学分支及力学，物理学中都有重要应用。

矩阵是研究二次型的的有力工具，同时也是重要的研究对象。本章采用矩阵与二次型互相渗透的研究方法，矩阵与二次型两套语言平行地出现。

本章的内容分为四个部分：二次型与对称矩阵，二次型的标准形，复二次型与实二次型，正定二次型。

二次型与对称矩阵之间存在一一对应关系，二次型等价与对称矩阵合同本质上是一致的。

二次型的标准形是指二次型化得的平方和的形式。化得标准形是最重要的问题之一，常采用配方法与初等变换法两种方法。

复二次型与实二次型是两种重要的二次型。鉴于复数域与实数域的特殊性，得出了一些更深入的结果，给出了等价类的类数及代表。

研究二次型的取值的情况，得到实二次型的值类。主要讨论正定二次型的问题。

本章的补充资料是：雅可比公式，二次型束，二次型的应用，历史资料点滴。

§2 内容提要

I 二次型与对称矩阵

设F是一个数域，x_1，x_2，…，x_n是n个文字。以F中的数为

系数的一个"二次"齐次多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=$

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1,n-1}x_1x_{n-1}+2a_{1n}x_1x_n \\
+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2,n-1}x_2x_{n-1}+2a_{2n}x_2x_n \\
+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+a_{n-1,n-1}x_{n-1}^2+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\
+a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为数域F上的一个n元二次型，简称二次型.该种写法称为二次型的字典形式。

若假定$a_{ij}=a_{ji}, i, j=1,2,\cdots,n$,且将$2a_{ij}x_ix_j$(其中$i<j$)写为$a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$,则

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\
&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,
\end{aligned}
$$

该种写法称为二次型的对称形式。

$$
\text{若设}A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A'=A,\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

则$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$,该种写法称为二次型的矩阵形式。

设有二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$, $A'=A$, 则称A是二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵,A的秩称为二次型f的秩。

二次型与其矩阵是相互唯一确定的。从而，若$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX=X'BX$, A, B都是对称矩阵，则A=B。

设x_1, $x_2,\cdots,x_n$和$y_1,y_2,\cdots,y_n$是两组文字.系数在数域F中的一组关系式

$$(*)\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n\\x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n\end{cases}$$

称为由$x_1,x_2,\cdots,x_n$到$y_1,y_2,\cdots,y_n$的一个线性替换，矩阵 C=(c_{ij})称为该线性替换的矩阵．若C是非退化(可逆)的，则称(*)是非退化（可逆）线性替换．

实际上，(*)式可以写成矩阵形式X＝CY，其中Y＝$(y_1\ y_2\ \cdots y_n)'$．

线性替换把二次型变为二次型．

设f与g是数域F上的两个二次型．若存在一个系数在F中的非退化线性替换把f变为g，则称f与g等价．

二次型的等价具有反身性、对称性、传递性，从而可以把二次型分类，所得的类称为等价类．

设A、B是数域F上的两个n阶矩阵．若存在F上的n阶可逆矩阵C，使得B＝C′AC，则称A与B合同．

数域F上的两个二次型等价，当且仅当它们的矩阵合同．

矩阵合同具有下列性质：１）合同的矩阵有相同的秩；２）矩阵的合同具有反身性、对称性、传递性，从而可将矩阵分类，所得的类称为合同类；３）与对称（反对称）矩阵合同的矩阵是对称（反对称）矩阵；４）矩阵的合同与所考虑的数域有关．

两个二次型属于同一个等价类，当且仅当它们的矩阵属于同一个合同类．

Ⅱ　二次型的标准形

若一个二次型能够经非退化线性替换化为平方和的形式，则称该平方和为该二次型的标准形．数域F上的任意一个n元二次型都可以经非退化线性替换化为其标准形．

数域F上的任意一个n阶对称矩阵必合同于数域F上的某一对

角形矩阵。该对角形矩阵称为该对称矩阵的合同标准形。

化二次型为标准形的常用方法有两种：配方法，初等变换法.

配方法的步骤是：1）若$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中没有平方项(即平方项的系数全为零)，而有x_ix_j的系数不为零，此时作非退化线性替换$x_i=y_i+y_j$，$x_j=y_i-y_j$，$x_k=y_k$，$k\neq i,j$，则出现平方项；2）若$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中含有平方项x_i^2，则先集中含x_i的所有项，进行配方；3）对于剩下的$n-1$个文字，继续类似地进行，直至全化为平方项为止。

初等变换法的步骤是：1）写出$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵A；2）对A"对称地"进行行与列的初等变换，即，对行作一初等变换后，立即对列作一同样的初等变换，从而，将A化为对角形矩阵D；3）写出D对应的二次型，即为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的标准形。

数域F上的任意一个二次型的标准形中非零平方项的个数是唯一确定的，等于它的秩，与所作的线性替换无关。

Ⅲ 复二次型与实二次型

任意一个复二次型总可以经过一个适当的非退化线性替换化成规范形$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2$，而且，规范形是由二次型的秩唯一决定的。从而，两个n元复二次型等价，当且仅当它们的秩相等，n元复二次型共有$n+1$个等价类。

对于任意一个秩为r的n阶复对称矩阵A，总存在复可逆矩阵C，使$C'AC=\{E_r, 0_{n-r}\}$，其中，主对角线上1的个数是r，0的个数是$n-r$.称为A的合同标准形。两个n阶复对称矩阵合同，当且仅当它们有相同的合同标准形，从而，n阶复对称矩阵有$n+1$个合同类。

任意一个实二次型总可以经过一个适当的非退化线性替换化成规范形$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$，而且，规范形是唯一的（惯性定律）。

秩为r的实二次型的规范形中正平方项的个数p称为正惯性指数，负平方项的个数$r-p$称为负惯性指数，它们的差$p-(r-p)=2p-r$称为符号差。

两个n元实二次型等价，当且仅当它们有相同的秩r与相同的正惯性指数p。从而，n元实二次型有$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$个等价类。

对于任意一个秩为r的n阶实对称矩阵A，总存在实可逆矩阵C，使$C'AC=[E_p, -E_{r-p}, 0_{n-r}]$，其中，主对角线上1的个数是$p$，$-1$的个数是$r-p$，0的个数是$n-r$。$p$与$r$由A唯一确定。称为A的合同标准形。两个$n$阶实对称矩阵合同，当且仅当它们有相同的合同标准形，从而，n阶实对称矩阵有$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$个合同类。

Ⅳ 正定二次型

将实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$看作实数域上的n元实函数，研究其取值的情况，从而进行分类，所得的类称为实二次型的值类。

设有实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$c_1,c_2,\cdots,c_n$是任意一组不全为零的实数。1）若恒有$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$，则称$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是正定的；2）若恒有$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)<0$，则称$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是负定的；3）若恒有$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\geqslant 0$，则称$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是半正定的；4）若恒有$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\leqslant 0$，则称$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是半负定的；5）若$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)$有时为正，有时为负，则称$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是不定的。

设有实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$，$X=CY$是非退化线性替换，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(CY)'A(CY)=Y'(C'AC)Y=g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$。1)若有不全为零的一组实数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使$f(k_1,k_2,\cdots,k_n)=s$，则有不全为零的一组实数$l_1,l_2,\cdots,l_n$，使$g(l_1,l_2,\cdots,l_n)=s$；2）若有一组不全为零的实数$l_1',l_2',\cdots,l_n'$，使$g(l_1',l_2',\cdots,l_n')=s'$，则有一组不全为零的实数$k_1',k_2',\cdots,k_n'$，使$f(k_1',k_2',\cdots,k_n')=s'$。

在非退化线性替换之下，实二次型的正定性、负定性、半正定性、半负定性、不定性均保持不变。

n元实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的值类完全由其秩$r(r\geqslant 0)$与正惯性指数p决定：1）f是半正定的，当且仅当$p=r$；2）f是正定的，当且仅当$p=r=n$；3）f是半负定的，当且仅当$p=0$；4）f是负定的，当且仅当$p=0$且$r=n$；5）f是不定的，当且仅当$0<p<r$。

若实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$正定，则称$f$的矩阵A是正定的。

正定矩阵有如下性质：1)正定矩阵的行列式恒为正；2)实对称矩阵A正定当且仅当A与单位矩阵合同；3）A是正定矩阵当且仅当A^{-1}是正定矩阵；4)两个正定矩阵的和是正定矩阵。

子式 $$D_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1i} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2i} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{ii} \end{vmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

称为n阶矩阵$A=(a_{ij})$的顺序主子式。

实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是正定的必要充分条件是f的矩阵A的顺序主子式全为正。

§3 重点难点

本章的主题词是：二次型，二次型的矩阵，二次型的秩，线性替换，二次型等价，二次型的等价类，矩阵合同，矩阵的合同类；二次型的标准形，对称矩阵的合同标准形，配方法，初等变换法；复二次型，实二次型，规范形，惯性定律，正惯性指数，负惯性指数，符号差，复对称矩阵的合同类，实对称矩阵的合同类；二次型的值类，正定二次型，负定二次型，半正定二次型，半负定二次型，不定二次型，正定矩阵，顺序主子式，主子式。

本章的基本方法是：化二次型为标准形的配方法，化二次型为标准形的初等变换法，对称矩阵合同标准形求法，实（复）二次型的规范形求法，实二次型正定判别法。

本章的重点是：二次型的标准形，实二次型的规范形，正定二次型。

化二次型为标准形是最基本的问题，是讨论其它问题如规范形、正定性等的基础。使对称矩阵合同于对角形，是与此等价的问题。化二次型为标准形的常用方法有两种：配方法，初等变换法。配方法直接化二次型为平方和，方法较为初等，容易掌握，只是计算过程较复杂，并且，求总的线性替换较麻烦。初等变换法是通过求得与二次型的矩阵合同的对角形矩阵，间接地求得二次型的标准形。两种方法各有利弊，互相补充。总之，成为本章的一个重点。

实二次型的规范形，是在标准形的基础上求得的，由此引入了正惯性指数等概念，进一步刻划了实二次型；同时，通过规范形，很方便地研究了实二次型的值类，给出了实二次型半正定、正定、半负定、负定、不定的必要充分条件，因此，成为本章的一个重点。

实二次型的取值问题有实际的意义，而正定二次型是最基本的值类。正定二次型的判定可采用两种方法：1）化实二次型为标准形（或规范形），观察正平方项个数、秩与文字个数是否相等；2）判断二次形的矩阵是否正定，即计算矩阵的各阶顺序主子式，看其值是否均大于零。总之，正定二次型成为本章的一个重点。

本章的难点是：惯性定律的证明，n 阶实对称矩阵的合同类，正定二次型。

实二次型的规范形的唯一性，称之为惯性定律，其证明篇幅较长，而且使用反证法，较难理解，因此，惯性定律的证明成为

本章的一个难点．解决困难的方法是：1)复习关于齐次线性方程组非零解的问题，为证明作好准备；2)研究关于取值的问题，从中发现导出矛盾的方法，自然地分析出证明中的齐次线性方程组；3）进一步分析齐次线性方程组，解释$y_{p+1}=0,\cdots,y_n=0$所起的作用；4）分析$y_1,y_2,\cdots,y_n$与$z_1,z_2,\cdots,z_n$的值之间的对应关系，说明前q个方程就是$z_1=z_2=\cdots=z_q=0$；5）反复研读证明，加深理解，进一步认识证明的必然性与巧妙性．

n阶实对称矩阵的合同标准形的结构不容易想象，从而，确定合同类的类数及每类中的代表，就更为困难，因此，成为本章的一个难点．解决困难的方法是：1）由实二次型的规范形过渡到实对称矩阵的合同标准形，明确“先1再－1最后0”的结构；2)明确同一类中的矩阵具有相同的合同标准形，该合同标准形就是该类的当然代表；3）按照“一看秩二看1三看－1”的顺序，考虑所有可能的代表，从而确定合同类的类数．

正定二次型既是本章的一个重点，又是本章的一个难点．关于用顺序主子式判定正定的结论，其证明篇幅较长，而且证明充分性时使用数学归纳法，还要进行技术上的处理；具体使用时，有些二次型的矩阵不易写出，顺序主子式不易计算，因此，成为本章的一个难点．解决困难的方法是：1)明确$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的正定性决定了$f_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)$的正定性；2)复习分块矩阵及其转置，作好准备，从而理解对于归纳假定之下矩阵的技术性处理；3）复习行计式的计算，为具体使用作准备．

§4 习题类解

Ⅰ 计算题

一 求二次型的矩阵

先将字典形式改写为对称形式，而后写出矩阵．必须注意矩阵的对称性．

例 1 写出下列二次型的矩阵：

1）$f_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2-x_3^2+x_1x_2-2x_1x_3+3x_2x_3$；

2）$f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+3x_2^2-x_3^2+x_1x_2-2x_1x_3+3x_2x_3$；

3）$f_3(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2x_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

解 1）因为，$f_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+\frac{1}{2}x_1x_2-x_1x_3$

$$+\frac{1}{2}x_2x_1+3x_2^2+\frac{3}{2}x_2x_3$$

$$-x_3x_1+\frac{3}{2}x_3x_2-x_3^2,$$

所以，$f_1(x_1,x_2,x_3)$的矩阵是$\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-1\\\frac{1}{2}&3&\frac{3}{2}\\-1&\frac{3}{2}&-1\end{pmatrix}$.

2）$f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的矩阵是$\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-1&0\\\frac{1}{2}&3&\frac{3}{2}&0\\-1&\frac{3}{2}&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

3）因为，$f_3(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2x_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$=x_1^2+5x_2^2+9x_3^2+6x_1x_2+10x_1x_3+14x_2x_3,$$

所以，$f_3(x_1,x_2,x_3)$的矩阵是$\begin{pmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{pmatrix}$.

说明 1） 本例的1)与2)表示相同，但文字的个数不同，从而矩阵不同；2)本例的3)说明，对于任意的n阶矩阵A，$X'AX$均为n元二次型，但A未必是该二次型的矩阵.

二　求二次型的标准形

利用§2，Ⅱ中所述的两种方法：配方法，初等变换法。

例 2　求二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$的标准形。

解 1　作非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1=z_1+z_2 \\ x_2=z_1-z_2 \\ x_3=\quad\quad z_3 \end{cases}$$

则
$$\begin{aligned} &f(x_1,x_2,x_3) \\ &=2(z_1+z_2)(z_1-z_2)-6(z_1-z_2)z_3+2(z_1+z_2)z_3 \\ &=2z_1^2-2z_2^2-4z_1z_3+8z_2z_3 \\ &=2(z_1-z_3)^2-2z_2^2-2z_3^2+8z_2z_3, \end{aligned}$$

作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1=z_1-z_3 \\ y_2=\quad z_2 \\ y_3=\quad\quad z_3, \end{cases} \text{即} \begin{cases} z_1=y_1+y_3 \\ z_2=\quad y_2 \\ z_3=\quad\quad y_3, \end{cases}$$

则
$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)&=2y_1^2-2y_2^2-2y_3^2+8y_2y_3 \\ &=2y_1^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2, \end{aligned}$$

作非退化线性替换

$$\begin{cases} w_1=y_1 \\ w_2=\quad y_2-2y_3, \\ w_3=\quad\quad y_3 \end{cases} \text{即} \begin{cases} y_1=w_1 \\ y_2=\quad w_2+2w_3 \\ y_3=\quad\quad w_3, \end{cases}$$

则　$f(x_1,x_2,x_3)=2w_1{}^2-2w_2{}^2+6w_3{}^2$，即为标准形。而这三次线性替换的结果相当于一个总的线性替换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

解 2　$f(x_1, x_2, x_3)$的阵是

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\end{pmatrix}.$$

作如下初等变换

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{[1+2(1)]}\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&0&-3\\1&-3&0\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[(1+2(1))]{}\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&0&-3\\-2&-3&0\\\hline 1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(3+1(1))\\(2+1(-\frac{1}{2}))}}\begin{pmatrix}2&1&-2\\0&-\frac{1}{2}&-2\\0&-2&-2\\\hline 1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{(2+1(-\frac{1}{2}))\\(3+1(1))}]{}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-2\\0&-2&-2\\\hline 1&-\frac{1}{2}&1\\1&\frac{1}{2}&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[(2(2))]{(2(2)}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&-4\\0&-4&-2\\\hline 1&-1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(3+2(-2)}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&-4\\0&0&6\\\hline 1&-1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[(3+2(-2))]{}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&6\\\hline 1&-1&3\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

则作非退化线性替换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix},$$

得到 $f(x_1,x_2,x_3)=2u_1^2-2u_2^2+6u_3^2$.

说明 本例的解2可以图示为

$$\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} C'AC \\ \cdots\cdots\cdots \\ C \end{pmatrix}.$$

例3 设有对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

试求可逆矩阵C，使C′AC为对角形矩阵.

解1 作初等变换，见例2的解2，从略.

所以 $$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C'AC=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}.$$

解2 以A为矩阵的二次型是

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3,$$

利用配方法，见例2的解1，从略. 得到，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad f(x_1,x_2,x_3)=2w_1^2-2w_2^2+6w_3^2,$$

所以 $$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C'AC=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}.$$

说明 1）例2与例3本质上是一回事；2）所求得的C可以不同，对角形矩阵也可以不同.

例4 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$ 的标准形.

解 因为，$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2$，所以，

设 $$\begin{cases} y_1=x_1+x_2 \\ y_2=x_2+2x_3, \\ y_3=x_3 \end{cases} \text{即} \begin{cases} x_1=y_1-y_2+2y_3 \\ x_2=y_2-2y_3 \\ x_3=y_3, \end{cases}$$

则这是一个非退化的线性替换，从而，$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2$

为标准形。

说明 1）本例说明，要从配方法与初等变换法中选取较简单的方法；2）本例还说明，可以用一步来完成配方，从而充分发挥配方法的优势，但是，要特别注意线性替换是否非退化，此时，可能出现退化的情况；3）二次型与对称矩阵，配方法与初等变换法之间的关系，可概括为下面两句话：两类问题实质相同，可以互相转化；两种方法各有利弊，应该酌情选择。

三　求二次型的规范形

求二次型的规范形，一般先求出标准形，而后再作一次适当的线性替换，求得规范形；有时，也可以直接求得规范形。

利用实二次型的规范形，可以解答正惯性指数、符号差等问题。

例5 分别在复数域与实数域中求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$ 的规范形。

解 同例1，从略，求得标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=2w_1^2-2w_2^2+6w_3^2$。

在复数域中，作非退化线性替换

$$\begin{cases} v_1=\sqrt{2}\,w_1 \\ v_2=\sqrt{2}\,i w_2 \\ v_3=\sqrt{6}\,w_3, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} w_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}v_1 \\ w_2=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i v_2 \\ w_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}v_3 \end{cases},$$

则 $f(x_1,x_2,x_3)=v_1^2+v_2^2+v_3^2$ 为规范形。

在实数域中，作非退化线性替换

$$\begin{cases} u_1=\sqrt{2}\,w_1 \\ u_2=\sqrt{6}\,w_3 \\ u_3=\sqrt{2}\,w_2, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} w_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}u_1 \\ w_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}u_3 \\ w_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}u_2 \end{cases},$$

则$f(x_1,x_2,x_3)=u_1{}^2+u_2{}^2-u_3{}^2$为规范形。

例 6 试求出三元实二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的所有等价类及其代表。

解 由实二次型的秩及正惯性指数，可知三元实二次型共有10个等价类，它们的代表分别是所化得的规范形：0；$y_1{}^2$，$-y_1^2$；$y_1^2+y_2^2$，$y_1^2-y_2^2$，$-y_1^2-y_2^2$；$y_1^2+y_2^2+y_3^2$，$y_1^2+y_2^2-y_3^2$，$y_1^2-y_2^2-y_3^2$，$-y_1^2-y_2^2-y_3^2$。

例 7 求$2n$元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})=x_1x_2+x_3x_4+\cdots+x_{2n-1}x_{2n}$的规范形，并求其秩及符号差。

解 依次作非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3+y_4 \\ x_4=y_3-y_4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{2n-1}=y_{2n-1}+y_{2n} \\ x_{2n}=y_{2n-1}-y_{2n} \end{cases},\qquad \begin{cases} z_1=y_1 \\ z_2=y_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_n=y_{2n-1} \\ z_{n+1}=y_2 \\ z_{n+2}=y_4 \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_{2n}=y_{2n} \end{cases},$$

则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})=y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\cdots+y_{2n-1}^2-y_{2n}^2$
$=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2-z_{n+1}^2-z_{n+2}^2-\cdots-z_n^2$ 为规范形。从而，秩为$2n$，符号差为0。

四 正定二次型的判定

判定实二次型是否正定的方法是：1)化得标准形或规范形，看系数为正的项数是否等于文字的个数；2)计算二次型的矩阵的各阶顺序主子式，看是否全为正。一般说来，方法2)较为简便。

例 8 判定实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$是否正定。

解 1 因为，$f(x_1,x_2,x_3)=5\left(x_1+\frac{2}{5}x_2-\frac{4}{5}x_3\right)^2+$

$\frac{1}{5}x_2^2-\frac{4}{5}x_2x_3+\frac{9}{5}x_3^2=5(x_1+\frac{2}{5}x_2-\frac{4}{5}x_3)^2+\frac{1}{5}(x_2-2x_3)^2+x_3^2$，所以，作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1=x_1+\frac{2}{5}x_2-\frac{4}{5}x_3 \\ y_2=\qquad\quad x_2-2x_3 \\ y_3=\qquad\qquad\quad x_3, \end{cases}$$

得到 $f(x_1,x_2,x_3)=5y_1^2+\frac{1}{5}y_2^2+y_3^2$.因此$f(x_1,x_2,x_3)$ 正定.

解 2　$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵是$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,

顺序主子式　$|5|>0$, $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}>0$, $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}>0$,

所以，$f(x_1,x_2,x_3)$正定.

例 9　求λ的值,使实二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_3x_1+x_4{}^2$是正定的.

解　二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

当顺序主子式

$$|\lambda|>0, \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}>0, \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}>0,\ |A|>0$$

时，二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$正定．由此得

$$\begin{cases} \lambda>0 \\ \lambda^2-1>0 \\ \lambda(1+\lambda)(\lambda-\frac{2}{\lambda}-1)>0, \end{cases}$$

解这个不等式组得，$\lambda>2$。因此，当$\lambda>2$时，二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$是正定的.

Ⅱ 证明题

一 关于矩阵合同

关于矩阵合同方面的题目，证明的方法大体可归纳为两种：1）将对称矩阵合同的问题转化成二次型来处理；2）利用矩阵合同的自身的性质来解决。

例1 证明：若$i_1i_2\cdots i_n$是一个n级排列，则下面两个矩阵合同，

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n}\end{pmatrix}.$$

证明1 记 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}\lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n}\end{pmatrix}$.

对于二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'BX=\lambda_{i_1}x_1^2+\lambda_{i_2}x_2^2+\cdots+\lambda_{i_n}x_n^2$，作非退化线性替换$x_1=y_{i_1}$，$x_2=y_{i_2},\cdots,x_n=y_{i_n}$，则

$f=\lambda_{i_1}y^2_{i_1}+\lambda^2_{i}y^2_{i_2}+\cdots+\lambda_{i_n}y^2_{i_n}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2=Y'AY$，所以，两矩阵合同. 其中 $X=(x_1x_2\cdots x_n)'$，$Y=(y_1y_2\cdots y_n)'$.

证明2 设B的主对角线上第k个元素为λ_1，则 $P(1,k)'BP(1,k)=B_1$ 的主对角线上第1个元素为λ_1；设B_1的主对角线上第l个元素为λ_2，则$P(2,l)'B_1P(2,l)=B_2$的主对角线上第1个元素为λ_1，第2个元素为λ_2；如此下去，就有
$P(n-1,n)'\cdots P(2,l)'P(1,k)'BP(1,k)P(2,l)\cdots P(n-1,n)=A$
若记$C=P(1,k)P(2,l)\cdots P(n-1,n)$，则$C'BC=A$. 所以，两矩阵合同.

说明 证明1较为简洁且较容易理解.

例2 证明：设A为n阶实可逆矩阵. 若A与$-A$在实数域上合同，则n必为偶数.

证明 因为，A与$-A$在实数域上合同，所以，存在实可逆矩阵C，使得$-A=C'AC$，取行列式得，$(-1)^n|A|=|-A|=|C'AC|=|A||C|^2$。又，A是可逆矩阵，所以，$|C|^2=(-1)^n>0$，因此，$n$必为偶数。

二 关于实二次型的值

与实二次型的值有关的问题，常常归结为规范形来处理。适当选取文字的值，利用规范形求出二次型的值，并且，易于确定值的符号。

例 3 证明：若A为n阶实对称矩阵，且$|A|<0$，则一定存在实n维向量$X_0\neq 0$，使$X_0'AX_0<0$。

证明 因为，$|A|<0$，所以，二次型$f=X'AX$的秩为n，且不是正定的，从而，有非退化线性替换$X=CY$，使f化为$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_n^2$，$p<n$。取$y_{p+1}=1$，而其余$y_i$均为0，则得到相应的$X_0\neq 0$，使得$f=X_0'AX_0=-1<0$.

例 4 证明：设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$是一个实二次型．若有实$n$维向量$X_1$，$X_2$，使$X_1'AX_1>0$，$X_2'AX_2<0$，则一定有实$n$维向量$X_0\neq 0$，使$X_0'AX_0=0$。

证明 由条件知，二次型是不定的，从而有非退化线性替换$X=CY$，使f化为$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$，$0<p<r$．取$y_p=y_{p+1}=1$，而其余$y_i$均为0，则得到相应的$X_0\neq 0$，使得$f=X_0'AX_0=0^2+\cdots+0^2+1^2-1^2-0^2-\cdots-0^2=0$。

三 关于实二次型的秩与符号差

关于实二次型的秩与符号差的证明题目，除了考虑秩与符号差的定义及性质之外，常常考虑归结为规范形来处理。

例 5 证明：实二次型的秩r与符号差s有相同的奇偶性，且$-r\leqslant s\leqslant r$。

证明 设实二次型的正惯性指数为p，负惯性指数为q，则$p+q=r$，$p-q=s$。从而就有$r+s=2p$，所以r与s有相同的奇偶

性。因为，$r-s=2q\geqslant 0$，$s=2p-r\geqslant -r$，所以，$-r\leqslant s\leqslant r$。

例 6 证明实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\lambda ij+i+j)x_ix_j$ 的秩和符号差与λ无关。

证明 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} \lambda+2 & 2\lambda+3 & 3\lambda+4 & \cdots n\lambda+(n+1) \\ 2\lambda+3 & 4\lambda+4 & 6\lambda+5 & \cdots 2n\lambda+(n+2) \\ 3\lambda+4 & 6\lambda+5 & 9\lambda+6 & \cdots 3n\lambda+(n+3) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ n\lambda+(n+1) & 2n\lambda+(n+2) & 3n\lambda+(n+3) & \cdots\ n^2\lambda+2n \end{pmatrix}.$$

依次把A的第1行的(-2)，(-3)，…，$(-n)$倍分别加到第2，3，…，n行上，得

$$B=\begin{pmatrix} \lambda+2 & 2\lambda+3 & 3\lambda+4\cdots & n\lambda+(n+1) \\ -1 & -2 & -3\cdots & -n \\ -2 & -4 & -6\cdots & -2n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -(n-1) & -2(n-1) & -3(n-1)\cdots & -n(n-1) \end{pmatrix}.$$

再对B作相应的列变换，即，把B的第1列的(-2)，(-3)，…，$(-n)$倍分别加到第2，3，…，n列上，得到与A合同的矩阵：

$$C=\begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 & -2\cdots & -(n-1) \\ -1 & 0 & 0\cdots & 0 \\ -2 & 0 & 0\cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\ \cdots & \cdots\cdots \\ -(n-1) & 0 & 0\cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

最后，把C的第2行的$\frac{1}{2}(\lambda+2)$，-2，…，$-(n-1)$倍分别加到第1，3，…，n行上，同时紧接着作相应的列变换，得到与C合同的矩阵

$$D=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

根据合同的传递性知，A与D合同，从而可以经非退化线性替换化为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=-2y_1y_2$。由此可知，$f$的秩为2，符号差为0，与$\lambda$无关。

例7 证明一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的必要充分条件是，它的秩等于2和符号差等于0，或者秩等于1。

证明 先证必要性。设

$$f=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+\cdots+b_nx_n)\neq 0.$$

若$(a_1,\cdots,a_n)$与$(b_1,\cdots,b_n)$成比例，不妨设$b_i=ka_i$，$i=1,2,\cdots,n$，且$a_1\neq 0$,则可以对f进行非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1=a_1x_1+\cdots+a_nx_n \\ y_2=x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=x_n \end{cases},$$

化为$f=ky_1^2$，此时f的秩为1。

若$(a_1,\cdots,a_n)$与$(b_1,\cdots,b_n)$不成比例，不妨设(a_1,a_2)与(b_1,b_2)不成比例，则可以对f连续进行下列非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \\ y_2=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n \\ y_3=x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=x_n \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_1=z_1+z_2 \\ y_2=z_1-z_2 \\ y_3=z_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=z_n \end{cases},$$

化为$f=y_1y_2=z_1^2-z_2^2$，此时f的秩为2，符号差为0。

再证明充分性。若f的秩为2，符号差为0，则f可以通过非退化线性替换$X=CY$化为$f=y_1^2-y_2^2=(y_1+y_2)(y_1-y_2)$,由$Y=C^{-1}X$知，$y_1,y_2,\cdots,y_n$可由$x_1,x_2,\cdots,x_n$线性表示,代入上式，即得到，$f$是$x_1,x_2,\cdots,x_n$的两个一次齐次多项式的乘积。

若f的秩为1，则f的规范形为y_1^2，同样可知结论成立。

四 关于正定与半正定

关于实二次型或实对称矩阵正定与半正定方面的题目，可以考虑下列几种处理方法：1）用定义证明；2）用规范形证明；3）用顺序主子式证明；4）用矩阵合同证明。

例 8 证明：实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$=n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \text{是半正定的.}$$

证明 因为 $(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i^2+x_j^2)$，

所以，对任意实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$而言，有

$$\begin{aligned}
f &= n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \\
&=(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2x_i x_j \\
&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i^2+x_j^2)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2x_i x_j \\
&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i^2+x_j^2-2x_i x_j) \\
&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2 \geqslant 0 .
\end{aligned}$$

因此，f为半正定的。

例 9 证明实二次型f半正定的必要充分条件是其正惯性指数p与秩r相等。

证明 先证必要性。用反证法。若$p<r$，则$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$经非退化线性替换$X=CY$化为 $f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$。取 $y_{p+1}=1$，而其余的y_i均为0，则得到相应的一组不全为0的$x_1, x_2, \cdots, x_n$的值，使$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=-1<0$，引出

矛盾。因此，$p=r$。

再证充分性。若$p=r$，则经非退化线性替换 $X=CY$化为 $f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2$.对任意一组不全为0的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，由$Y=C^{-1}X$得一组不全为0的实数$y_1,y_2,\cdots,y_n$,从而就有$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_r{}^2\geqslant 0$，因此，$f$半正定。

例10 证明n阶实对称矩阵A正定的必要充分条件是它的一切主子式全大于零.所谓主子式是指行指标与列指标相同的子式.

证明 先证必要性。由A正定知二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$正定。对于A的任一$k$阶主子式

$$|A_m|=\begin{vmatrix} a_{k_1k_1} & a_{k_1k_2} & \cdots & a_{k_1k_m} \\ a_{k_2k_1} & a_{k_2k_2} & \cdots & a_{k_2k_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k_mk_1} & a_{k_mk_2} & \cdots & a_{k_mk_m} \end{vmatrix}$$

考虑m元二次型$f_m(y_1,y_2,\cdots,y_m)=Y'A_mY$, $Y'=(y_1y_2\cdots y_m)$,对于任意一组不全为零的实数$y_1,y_2,\cdots,y_m$，取$x_{k_1}=y_1,x_{k_2}=y_2,\cdots,x_{k_m}=y_m$，其余$x_i$均为0,则 $f_m(y_1,y_2,\cdots,y_m)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$.所以,$f_m(y_1,y_2,\cdots,y_m)$正定,$|A_m|>0$.

再证充分性。若A的一切主子式全大于零，则A的一切顺序主子式自然全大于零，所以，A正定。

说明 由本例容易得到：若n阶实对称矩阵A的主对角线上有一元素$\leqslant 0$，则A不正定。

例11 证明n阶的实数矩阵A正定的必要充分条件是存在n阶实可逆矩阵P使$A=P'P$。

证明 先证必要性。若A正定，则A合同于E，从而有可逆实矩阵Q使$Q'AQ=E$.记$P=Q^{-1}$,则$A=(Q^{-1})'EQ^{-1}=P'EP=P'P$。

再证充分性。若$A=P'P$，则 $A'=(P'P)'=P'(P')'=P'P=A$，A对称。又$A=P'EP$，A与E合同。因此A正定。

§5　补充资料

Ⅰ　雅可比公式

设二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$的秩为$r>0$，并且其矩阵A的顺序主子式$D_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,r$,则$f$的标准形是

$$\frac{1}{D_1}y_1^2+\frac{D_1}{D_2}y_2^2+\cdots+\frac{D_{r-1}}{D_r}y_r^2.$$

Ⅱ　二次型束

两个实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$，$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'BX$决定一个二次型束$X'AX-\lambda(X'BX)$。当$X'BX$正定时，称为正则二次型束．二次型束有一套理论．此处从略．二次型束在微振动理论中有应用．

Ⅲ　二次型的应用

一　因式分解

设有n元二次实系数多项式

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}2a_{i,n+1}x_i+a_{n+1,n+1}.$$

考虑实系数$n+1$元二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}x_ix_j.$$

F在实数域R中能够分解为两个一次多项式乘积的必要充分条件是实二次型f的秩为2而符号差为0或f的秩为1．

在实二次型f的分解式中，令$x_{n+1}=1$，即得到n元二次多项式F的分解式。

例子。$F(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+3x_3^2+x_1x_2+4x_1x_3-x_2x_3-x_1-5x_2-5x_3-2=(x_1+2x_2+3x_3+1)(x_1-x_2+x_3-2)$.

二　二元函数的极值

$M(x_0,y_0)$是二元函数$f(x,y)$的稳定点，即$f_x'(x_0,y_0)=$

$f_y'(x_0,y_0)=0$，并且$f(x,y)$的一切二阶偏导数在M点连续．记 $A=f_{xx}''(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}''(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}''(x_0,y_0)$，则 $d^2f=A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2$是 $\Delta x,\Delta y$的二次型．当该二次型负定时，在M点取极大值；当该二次型正定时，在M点取极小值；当该二次型不定时，在M点无极值；当该二次型退化时，应进一步考虑．

三　二次曲面方程的化简

见第九章，§2，V，四．此处从略．

四　微振动

一个具有n个自由度的力学系统，若系统之间的关系不含有时间，并在一个有势外力作用下，则这个系统的运动是由微分方程组

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=\frac{\partial U}{\partial q_k}\qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,n)$$

来决定，其中T是系统的动能，U是给定的q_k的函数（力函数），假定它不依赖于时间t．可以证明，T是q_k对时间t的微商q_k'的二次型

$$T=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}q_i'q_j'\quad (a_{ij}=a_{ji}),$$

其中系数是q_k的已知函数．假定

$$\frac{\partial U}{\partial q_k}=0\text{ 当}q_1=\cdots=q_n=0\ (k=1,2,\cdots,n).$$

从而微分方程组有一个显然解$q_1=\cdots=q_n=0$，与之对应的是这个系统的一个平衡位置．研究平衡位置附近的微振动时，可以认为U仅含有二次项，即

$$-U=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}q_iq_j(b_{ij}=b_{ji}).$$

根据问题的条件，二次型T与$-U$是正定的，从而，引入一组新

的变数p_k，二次型T与$-$U同时化为平方和，且T的平方系数为1.

$$T=\sum_{s=1}^{n} p_s'^2;\quad -U=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^2 p_s^2.$$

这样，方程组就变为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p_k'}\right)=\frac{\partial U}{\partial p_k},\ p_k''+\lambda_k^2 p_k=0\ (k=1,2,\cdots,s).$$

Ⅳ 历史资料点滴

1748年，瑞士数学家欧拉(1707,4,15-1783,9,18)在他的《无穷小分析引论》这部论著中写出了化三个变数的二次型到它们的主轴上去的问题，他详尽地说明了由二次方程定义的曲线的性质.

十八世纪末，法国数学家拉格朗日（1736—1813）引入了n个变量的二次型，并化为标准形。

1826年，法国数学家柯西（1787,8，21—1857,5，23）在他的《几何中无穷小演算的应用教程》这部著作中给出了将二次曲线和二次曲面的方程变形为标准形的方法，并根据二次项的符号来分类。然而，那时并不清楚，为什么在化简成标准形时，总得到同样数目的正项和负项。1852年，英国数学家西勒维斯特（1814,9,3—1897,3,15）回答了这个问题，给出了n个文字的二次型的惯性定律，认为该定律是自明的，没有给出证明。1857年，德国数学家雅可比重新发现并证明了惯性定律。

德国数学家高斯（1777,4,30—1855,2,23）早在1801年他出版的数学巨著《算术的研究》中就包含了对二次型的探讨。他用行列式表示二次型$ax^2+2bxy+cy^2$的判别式，还引进了正定、半正定、负定的概念，但负定概念实际上是现代的半负定。德国数学家狄利克雷（1805—1859）努力简化高斯的数论，把分析学的方法用于二元二次型类数的计算，引入所谓狄利克雷级数。

西勒维斯特还给出了正定二次型的必要充分条件是它的矩阵的各阶主子式全为正的结论。

1858年，德国数学家维尔斯特拉斯（1815,10,31—1897，2，19）对于同时化两个二次型为平方和的问题，给出了一般的方法，并把这一结果应用于微振动的力学问题。1868年，他完成了二次型的理论，并把这一理论推广到双线性型的情况。

§6 基本习题

1 用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 为标准形。

2 用初等变换法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 为标准形。

3 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$，

试求可逆矩阵C，使 $C'AC$ 成为对角形。

4 判定实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=10x_1^2+8x_1x_2+24x_1x_3+2x_2^2-28x_2x_3+x_3^2$ 是否正定。

5 当 t 取什么值时，实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的？

6 设A是 n 阶实反对称矩阵，E是 n 阶单位矩阵，证明 $E-A^2$ 是正定矩阵。

7 证明正定矩阵A的伴随矩阵 A^* 也是正定矩阵。

8 设A，B均为正定矩阵，α，β 均为正实数，证明 $\alpha A+\beta B$ 是正定矩阵。

9 设 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是实数，证明实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)+(x_n+a_nx_1)^2$ 是正定的必要充分条件是 $1+(-1)\prod_{i=1}^{n}a_i\neq 0$。

10 证明：若 n 元实二次型 f 的正负惯性指数分别为 p,q，则 f 可化为 $a_1y_1^2+\cdots+a_py_p^2+b_1y_{p+1}^2+\cdots+b_qy_{p+q}^2$，其中 $a_1,\cdots,a_p$ 为任意 p 个正数，$b_1,\cdots,b_q$ 为任意 q 个负数。

第六章　线性空间

§1 概括说明

行列式、线性方程组、矩阵的运算，属于线性代数学的范畴，可以认为是线性代数学的初等部分。同时，它们又是研究线性代数学的必备的工具。相对而言，线性空间、线性变换等，则是线性代数学的高等部分。线性空间的理论，是线性代数学这一学科的基础。

线性空间的雏型是解析几何中的平面 V_2与空间V_3，它是在考察了大量的数学对象（如几何学与物理学中的向量，代数学中的n维向量、矩阵、多项式，分析学中的函数等等）的本质属性后抽象出来的。线性空间是最基本的数学概念之一，它的理论与方法已经渗透到自然科学、工程技术的各个领域。

本章中，先以公理的形式给出线性空间的概念，而后由此概念出发进行逻辑推理，建立线性空间的一整套理论。这种公理化方法的意义在于，它不涉及讨论对象的具体内容及性质，得到的结论具有一般性，它是近代数学的重要标志与基本手段，对后面的学习有指导意义。

本章的内容分为四个部分：集合与映射，线性空间的定义、性质、维数，基与坐标、同构、基变换与坐标变换，线性子空间及其交、和、直和。

集合与映射是数学的基本概念，并不属于线性空间的范畴，仅作为讲述线性空间理论的必要准备。

线性空间的定义可概括为非空集合、数域、两种运算、八条公理，是本章的出发点与基础。线性空间也称为向量空间，其元

素称为向量，讨论向量的线性相关性，并由此得出维数的概念。

对于线性空间，主要研究有限维的情况，从而基起着根本的作用。由基引出向量坐标的概念，自然地建立起n维线性空间与F^n的同构，进而建立线性空间同构的一般概念。基之间的关系由过渡矩阵刻划，同时，基变换引起坐标变换。

线性子空间是一个重要的研究对象，主要研究作成子空间的条件，子空间的交、和、直和。直和在以后各章中将经常用到。

本章的补充资料是：无限维线性空间，商空间，线性方程组的解空间，历史资料点滴。

§2 内容提要

I 集合与映射

一 集合

集合是数学中最基本的概念之一，是不加定义的概念，仅给出描述。

在数学上，把某些被考察的对象的全体当作一个整体看待，称为一个集合。简言之，所谓一个集合就是作整体看的一堆东西。组成集合的东西称为该集合的元素。若a是集合M的元素，则记为$a\in M$，读作“a属于M”；若a不是集合M的元素，则记作$a\overline{\in}M$或$a\notin M$，读作“a不属于M”。

我们已经学习过了集合$F[x]$，F^n，$M_n(F)$等。

所谓给出一个集合就是规定这个集合是由哪些元素组成的。因此，给出一个集合的方式不外两种：一种是列举出它的全部元素，例如，$M=\{1,2,3\}$；一种是给出这个集合的元素所具有的特征性质，记作$M=\{a|a$具有的性质$\}$，例如，$M=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}$且$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}$。

设M、N是两个集合。若M的每个元素都属于N，即，对于

任意的$a\in M$，均有$a\in N$，则称M是N的子集合，记作$M\subseteqq N$或$N\supseteqq M$，读作"M包含于N"或"N包含M"．若M是N的子集合，且存在$b\in N$，使得$b\notin M$，则称M是N的真子集合，记作$M\subsetneqq N$.

不包含任何元素的集合称为空集合，记作ϕ．例如，方程$x^2+1=0$的实根的集合是一个空集合．我们规定，空集合是任意集合的子集合，即，对于任意集合M，均有$\phi\subseteqq M$.

若两个集合M与N含有完全相同的元素，即，$a\in M$当且仅当$a\in N$，则称它们相等，记作$M=N$．我们有：$M=N\Leftrightarrow M\subseteqq N$且$N\subseteqq M$.

设M、N是两个集合，把它们的元素合并在一起得到一个集合，称为M与N的并集，记作$M\cup N$．即$M\cup N=\{x|x\in M$或$x\in N\}$.

设M、N是两个集合，M与N的公共元素的全体组成一个集合，称为M与N的交集，记作$M\cap N$，即$M\cap N=\{x|x\in M$且$x\in N\}$.

设M、N是两个集合，由一切属于M但不属于N的元素组成一个集合，称为M与N的差集，记作$M\setminus N$或$M-N$，即$M-N=\{x|x\in M$但$x\overline{\in} N\}$.

求并集、交集、差集，称为集合的运算.

集合的运算具有下列性质：1）$M\cup N=N\cup M$，$M\cap N=N\cap M$；2）$(M\cup N)\cup K=M\cup(N\cup K)$，$(M\cap N)\cap K=M\cap(N\cap K)$；3）$M\cap(N\cup K)=(M\cap N)\cup(M\cap K)$，$M\cup(N\cap K)=(M\cup N)\cap(M\cup K)$；4）$M-N=(M\cup N)-N$；5）$M\subseteqq M\cup N$，$N\subseteqq M\cup N$，$M\cap N\subseteqq M$，$M\cap N\subseteqq N$；6）$M\subseteqq N\Leftrightarrow M\cap N=M\Leftrightarrow M\cup N=N$.

设M、N是两个集合，由M中的任一元素a与N中任一元素b所作成的有序元素对(a,b)的全体组成一个集合，称为M与N的笛卡尔积集，记作$M\times N$，即$M\times N=\{(a,b)|a\in M, b\in N\}$.

若一个集合含有有限多个元素，则称该集合为有限集合。例如，集合 $M=\{1, 2, 3\}$．若一个集合含有无限多个元素，则称该集合为无限集合．例如，任意数域$\mathbf{F}$．

二　映射

设M与M′是两个集合，σ是一个法则．若对于M中的每一个元素a，根据法则σ，M′中都有唯一确定的元素a'与之对应，则称σ是集合M到集合M′的一个映射，记作$\sigma: M \to M'$。映射σ使$a \in M$与$a' \in M'$对应，记作$\sigma(a)=a'$．称a'是a在映射σ下的象，称a是a'在映射σ下的一个原象．

集合M到M自身的映射，称为M的变换．

设M是集合，定义$\sigma: M \to M$，$\sigma(a)=a$，$a \in M$，称σ是集合M的恒等映射或单位映射，记作I_M，

设σ与τ是M到M′的两个映射．若对于任意的$a \in M$，都有$\sigma(a)=\tau(a)$，则称σ与τ相等，记作$\sigma=\tau$．

设$\sigma: M \to M'$，定义$\sigma(M)=\{a' \mid a'=\sigma(a),\ a \in M\}$，称$\sigma(M)$是M在映射$\sigma$下的象集合．我们有：$\sigma(M) \subseteq M'$．

设$\sigma: M \to M'$．若由$a \neq b$得出$\sigma(a) \neq \sigma(b)$，对于任意$a, b \in M$，则称σ是M到M′的一个单射，也称映射σ是1-1的．

设$\sigma: M \to M'$．若对于任意的$a' \in M'$，均存在$a \in M$，使得$\sigma(a)=a'$，换言之，$\sigma(M)=M'$．则称σ是M到M′的一个满射，也称映射σ是映上的．

若映射$\sigma: M \to M'$，既是单射，又是满射，则称σ是一个双射，也称σ是一个一一对应，常记作$M \leftrightarrow M'$，$a \leftrightarrow \sigma(a)$，$a \leftrightarrow a'$

设有$\sigma: M \to M'$与$\tau: M' \to M''$，定义$\tau\sigma: M \to M''$，$(\tau\sigma)(a)=\tau(\sigma(a))$，对于任意的$a \in M$，称为$\sigma$与$\tau$的乘积．

若σ是M到M′的映射，则$I_{M'}\sigma=\sigma I_M=\sigma$．

若$\sigma: M \to M'$，$\tau: M' \to M''$，$\psi: M'' \to M'''$，则$(\psi\tau)\sigma=\psi(\tau\sigma)$．

设有$\sigma: M \to M'$．若有$\tau: M' \to M$，使得$\tau\sigma=I_M$，则称σ是

左可逆映射，称τ是σ的左逆映射．若有$\psi: M'\to M$，使得$\sigma\psi = I_{M'}$，则称σ是右可逆映射，称ψ是σ的右逆映射． 当σ是双侧可逆时，称σ是可逆映射．

若$\sigma: M\to M'$，$\tau: M'\to M$，$\psi: M'\to M$，且$\tau\sigma=I_M$，$\sigma\psi=I_{M'}$，则$\tau=\psi$．称τ是σ的一个逆映射．σ的逆映射是唯一的，记作σ^{-1}．从而就有，$\sigma^{-1}\sigma=I_M$，$\sigma\sigma^{-1}=I_{M'}$．

若$\sigma: M\to M'$，则，1）σ是左可逆映射$\Leftrightarrow\sigma$是单射；2）σ是右可逆映射$\Leftrightarrow\sigma$是满射；3）σ是可逆映射$\Leftrightarrow\sigma$是双射．

若$\sigma: M\to M'$，$\tau: M'\to M''$均为可逆映射，则$\tau\sigma$是可逆映射，并且$(\tau\sigma)^{-1}=\sigma^{-1}\tau^{-1}$．

Ⅰ　线性空间的定义、性质、维数

一　定义与例子

设**F**是一个数域，其元素用小写英文字母$a,b,c\cdots$表示；V是一个非空集合，其元素称为向量，用小写希腊字母$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$表示．若

1°在V中定义了一个加法．即对于V中任意两个向量α,β，在V中都有一个唯一确定的向量γ与它们对应，称γ是α与β的和，记作$\gamma=\alpha+\beta$．

2° 在**F**与V之间有一个数量乘法．即，对于**F**中的任一数k与V中的任一向量α，在V中都有一个唯一确定的向量δ与它们对应，称δ是k与α的数量乘积，记作$\delta=k\alpha$．

3° 加法和数量乘法满足：1）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；2）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；3）V中存在一个向量，称为零向量，记作0，使得，对于V中任一向量α，都有$\alpha+0=\alpha$；4）对于V中每个向量α，都相应地在V中存在一个向量β，称为α的负向量，使得$\alpha+\beta=0$；5）$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$；6）$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$；7）$k(l\alpha)=(kl)\alpha$；8）$1\alpha=\alpha$，其中$\alpha,\beta,\gamma$是V中任意向量，$k$，$l$是**F**中任意数．

则称V对于加法与数量乘法作成F上的一个线性空间，简称V是F上的一个线性空间，也称为向量空间。加法与数量乘法合称为线性运算。有时，称F是V的基域，称F中的数为纯量，称数量乘法为纯量乘法。

我们有下列线性空间的例子：

1° 平面（空间）中的全体向量组成的集合 $V_2(V_3)$ 是实数域R上的线性空间；

2° F^n是数域F上的线性空间；

3° $F[x]$对于多项式的加法与数和多项式的乘法作成数域F上的一个线性空间。数域F上的所有次数小于n的多项式及零多项式作成的集合记作$F[x]_n$，对多项式的加法与数和多项式的乘法，也作成F上的一个线性空间；

4° $M_n(F)$对于矩阵的加法与数和矩阵的乘法，作成数域F的上一个线性空间；

5° 复数域C是实数域R上的线性空间；

6° 数域F是其自身上的线性空间；

7° 全体实函数作成的集合V，对于函数的加法与数和函数的乘法，作成R上的线性空间；

8° 全体收敛于0的实数无穷数列作成的集合V，对于数列的加法$\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$与数和数列的数量乘法$k\{a_n\}=\{ka_n\}$，作成R上的线性空间。

二　简单性质

由线性空间的定义，推出下列简单性质：

1° 零向量唯一；

2° 任一向量α的负向量唯一，记作$-\alpha$；

3° $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s=(\alpha_1+\cdots+\alpha_t)+(\alpha_{t+1}+\cdots+\alpha_s)$；

4° $\alpha+\beta=\beta+\alpha$可由其它条件推出；

5° 条件3）与4）可改为：方程$\alpha+x=\beta$对于V中的任意

向量α，β有解；

6° $0\alpha=0$，$k0=0$，$(-1)\alpha=-\alpha$，$-(-\alpha)=\alpha$，$(-k)\alpha=k(-\alpha)=-k\alpha$；

7° 定义减法：$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$．$k(\alpha-\beta)=k\alpha-k\beta$，$\alpha+\beta=\gamma\Leftrightarrow\alpha=\gamma-\beta$．对于V中的任意向量$\alpha$，$\beta$，方程$\alpha+x=\beta$在V中有且仅有一解$x=\beta-\alpha$；

8° $\alpha+\beta=\alpha+\gamma\Leftrightarrow\beta=\gamma$；

9° $k\alpha=0\Leftrightarrow k=0$或$\alpha=0$；

10° $(k_1+k_2+\cdots+k_s)\alpha=k_1\alpha+k_2\alpha+\cdots+k_s\alpha$，
$k(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)=k\alpha_1+k\alpha_2+\cdots+k\alpha_s$；

11° 对于任意正整数m，有$m\alpha=\alpha+\alpha+\cdots+\alpha$，共$m$个$\alpha$；

12° $\alpha\neq0$，$\alpha\in$ V，a，$b\in$ **F**，则$a\neq b\Leftrightarrow a\alpha\neq b\alpha$，从而，若V中有非零向量，则V有无限多个向量．

三　线性相关性

我们先给出下列定义：

1° 设V是数域**F**上的线性空间，α_1，α_2，…，$\alpha_r(r\geqslant1)$是V中的一组向量，$\alpha\in$ V．若有**F**中的数k_1，k_2，…，k_r，使得$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$，则称$\alpha$是向量$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_r$的一个线性组合，也称$\alpha$可以由向量组$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_r$线性表出．

2° 设 α_1，α_2，…，α_r (1) 与 β_1，β_2，…，β_s (2) 是V中两个向量组．若(1)中每个向量都可以由向量组(2)线性表出，则称向量组(1)可以由向量组(2)线性表出．若(1)与(2)可以互相线性表出，则称(1)与(2)等价．

3° 设有线性空间V中的向量α_1，α_2，…，$\alpha_r(r\geqslant1)$．若有数域**F**中不全为零的数k_1，k_2，…，k_r，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$ (3) 则称α_1，α_2，…，α_r线性相关．若α_1，α_2，…，α_r不线性相关，即(3)式仅当$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$时才成立，则称α_1，α_2，…，α_r线性无关，

4° 设有线性空间V中的向量组α_1，α_2,…，α_s及该向量组的部分组α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_t}，$s\geqslant 1$，$t\geqslant 1$．若：1）α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_t}线性无关；2）对任一α_i，$i=1,2,\cdots,s$，向量组 α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_t}，α_i均线性相关，则称α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_t}是α_1，α_2，…，α_s的一个极大无关组．

5° 向量组的一个极大无关组所含向量的个数称为该向量组的秩．若向量组没有极大无关组，则称该向量组的秩是零．

由上述定义1°—5°，我们推出下列性质：

1° 若β可以由α_1，α_2,…，α_r的一个部分组线性表出，则β可以由α_1，α_2,…，α_r线性表出．

2° α_1，α_2,…，α_r中的任一向量α_i都可以由α_1，α_2,…,α_r线性表出．

3° 若α可以由α_1，α_2,…，α_r线性表出，α_1，α_2，…，α_r可以由β_1，β_2,…,β_s线性表出，则α可以由β_1，β_2,…，β_s线性表出．简言之，线性表出具有传递性．

4° 若一向量组有一个部分组线性相关，则该向量组线性相关．若一向量组线性无关，则其任一部分组均线性无关．

5° 若一向量组中有零向量，则该向量组线性相关．若一向量组线性无关，则其每个向量均不为零向量．

6° 对于单独一个向量α而言，α线性相关$\Leftrightarrow\alpha=0$；α线性无关$\Leftrightarrow\alpha\neq 0$．对于向量$\alpha_1$，$\alpha_2$,…，$\alpha_r(r>1)$而言，$\alpha_1$，$\alpha_2$,…，$\alpha_r$线性相关$\Leftrightarrow\alpha_1$，$\alpha_2$,…，$\alpha_r$中某一向量可以由其余向量线性表出；$\alpha_1$，$\alpha_2$,…，$\alpha_r$线性无关$\Leftrightarrow\alpha_1$，$\alpha_2$,…，$\alpha_r$中任一向量均不可以由其余向量线性表出．

7° 向量α_1，α_2,…，$\alpha_r(r>1)$线性相关$\Leftrightarrow\alpha_1=0$，或有一个$s$，$1<s\leqslant r$，使得$\alpha_s$可以由$\alpha_1$，$\alpha_2$,…，$\alpha_{s-1}$线性表出；$\alpha_1$，

$\alpha_2,\cdots,\ \alpha_r(r>1)$线性无关$\Leftrightarrow\alpha_1\neq0$且对于任一个$t$，$t=2,3,\cdots,r$，$\alpha_t$均不可以由$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_{t-1}$线性表出。

8° 设$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r$与$\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_s$是V中的两个向量组。若$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r$可以由$\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_s$线性表出，且$r>s$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$必线性相关。若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可以由$\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_s$线性表出，且$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r$线性无关，则$r\leqslant s$。

9° 若$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r$线性无关，而$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r,\ \beta$线性相关，则$\beta$可以由$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r$线性表出，且表示方法唯一。

10° 向量组的等价具有反身性、对称性、传递性。

11° 两个线性无关的等价的向量组必含有相同个数的向量。

12° (替换定理)设$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$是V中的两个向量组。若$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r$线性无关，$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r$可以由$\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_s$线性表出，则$r\leqslant s$，并且，必要时可以重新编号，使得$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r$替换$\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_r$之后，所得的向量组$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r,\ \beta_{r+1},\cdots,\ \beta_s$与$\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_s$等价。

13° 向量组与其任意一极大无关组等价。

14° 完全由零向量组成的向量组没有极大无关组。若一向量组含有非零向量，则该向量组一定有极大无关组。

15° 一个向量组的极大无关组不一定是唯一的，它的任一个线性无关的部分组都可以扩充为一个极大无关组。

16° 一个向量组的任意两个极大无关组是等价的，从而所包含向量的个数相等。

17° 秩是向量组自身的属性，是唯一确定的。

18° 若两个向量组等价，则它们的秩相等。

19° 若两个向量组等秩且其中有一个组可由另一个组线性表出，则这两个向量组等价。

20° 若向量组$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r$的秩是$t$，则$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_r$中任意$t$个线性无关的向量均构成它的一个极大无关组。$\alpha_1,\ \alpha_2,$

…，α_r线性无关当且仅当它的秩是r，当且仅当它的极大无关组只有其自身。

四 维数

定义．设V是数域F上的线性空间．若V中线性无关的向量的最大个数为n，即，V中存在n个线性无关的向量，而V中任意$n+1$个向量均线性相关，则称线性空间V是n维的，记作$dim\,V=n$．若对于任意的正整数m，在V中总存在m个线性无关的向量，则称线性空间V是无限维的．

由定义得出：1）$dim\mathbf{F}^n=n$；2）$\mathbf{F}[x]$是无限维的；3）若$dim\,V=0$，则$V=\{0\}$；4）任一线性空间，不是有限维的，就是无限维的．

维数是衡量线性空间“大小”的一种尺度．

本书主要研究有限维的线性空间．

Ⅱ 基与坐标、同构、基变换与坐标变换

一 维数与基

设V是数域F上的线性空间，ε_1，ε_2，…，ε_n是V中的一向量组．若：1）ε_1，ε_2，…，ε_n线性无关；2）V中任一向量都是ε_1，ε_2，…，ε_n的线性组合，则称ε_1，ε_2，…，ε_n是V的一组基（基底、底）．

数域F上的线性空间V是n维的$\Leftrightarrow$V中存在n个向量ε_1，ε_2，…，ε_n作成V的一组基．

n维线性空间V中任意n个线性无关的向量均作成V的一组基，任意多于n个向量作成的向量组必线性相关，任意一组线性无关的向量都可以扩充为一组基．

有限维线性空间V的基不是唯一的，但V的基所含向量的个数是固定的，等于$dim\,V$．

二 基与坐标

若ε_1，ε_2，…，ε_n是n维线性空间V的一组基，则V中任一

向量α均可以唯一地表为ε_1，ε_2，…，ε_n的线性组合 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$，称系数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$为向量$\alpha$在该组基下的坐标，记作$[\alpha]$。$[\alpha]$是$F^n$中的向量．$[\alpha]$也可以写为列的形式。

把向量当作数看待，并认为$a\varepsilon_i = \varepsilon_i a$，"形式地"作矩阵乘法，得到：向量$\alpha$在一组基$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2, \cdots$，$\varepsilon_n$下的坐标是$a_1, a_2, \cdots$，$a_n \Leftrightarrow$

$$\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

若$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$，$\varepsilon_n$是数域F上的线性空间V的一组基，则对于V中任意向量α，β及F中任意数k，向量在该组基下的坐标具有性质：1）$[\alpha+\beta] = [\alpha] + [\beta]$；2）$[k\alpha] = k[\alpha]$；3）V中向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关$\Leftrightarrow [\alpha_1]$，$[\alpha_2], \cdots$，$[\alpha_m]$线性无关。

三　同构

定义．设V与V′是数域F上的两个线性空间．若有V到V′的双射σ，满足：1）$\sigma(\alpha+\beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$；2）$\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$，其中$\alpha$，$\beta$是V中任意向量，$k$是F中任意数，则称$\sigma$是V到V′的同构映射，称V与V′同构，记作$V \overset{\sigma}{\cong} V'$或$V \cong V'$。

由定义推出下列性质：

1）$\sigma(0) = 0'$，$\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$；

2）$\sigma(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s) = k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2) + \cdots + k_s\sigma(\alpha_s)$；

3）$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \Leftrightarrow k_1\sigma(\alpha_1) + k_1\sigma(\alpha_2) + \cdots + k_s\sigma(\alpha_s) = 0'$；

4）α_1，$\alpha_2, \cdots$，α_s线性无关$\Leftrightarrow \sigma(\alpha_1)$，$\sigma(\alpha_2), \cdots$，$\sigma(\alpha_s)$

线性无关；

5）同构映射的乘积是同构映射，同构映射是可逆映射且其逆映射也是同构映射；

6）线性空间的同构具有反身性、对称性、传递性；

7）若$V \overset{\sigma}{\cong} V'$，W是V的子空间，$\sigma(W)=\{\sigma(\alpha)|\alpha \in W\}$，则$\sigma(W)$是$V'$的子空间，且$W \overset{\sigma}{\cong} \sigma(W)$。

设V是数域**F**上的n维线性空间，取定V的一组基ε_1，ε_2，…，ε_n，作

$$\sigma: V \to \mathbf{F}^n,\ \sigma(\alpha)=(\alpha),\ \forall \alpha \in V,$$

即，α与α在ε_1，ε_2，…，ε_n下的坐标对应，则σ是双射，且保持线性运算，从而$V \overset{\sigma}{\cong} \mathbf{F}^n$。

定理.两个有限维线性空间V与V′同构$\Leftrightarrow dimV=dimV'$.

在线性空间的抽象讨论中，我们不考虑线性空间的向量具体是什么，也不考虑其中的运算是如何具体定义的，而只涉及线性空间在所定义的运算下的代数性质。从这个观点看来，同构的线性空间可以不加区别。因此，维数是有限维线性空间的唯一的本质特征，$\mathbf{F}^n$可以作为数域**F**上的n维线性空间的代表，关于$\mathbf{F}^n$的所有结论在一般的n维线性空间中均成立。

四　基变换与坐标变换

在"形式地"相乘的意义之下，我们考虑向量组与矩阵间的运算性质。

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是线性空间V中的两个向量组，$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$是**F**上的两个$n$阶矩阵，则

1）$((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A)B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(AB)$；

2）$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(A+B)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A+(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)B$；

3）$(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A+$

$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)A$。

若$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)M$，M是$k$阶可逆矩阵，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$线性无关$\Leftrightarrow\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$线性无关。

若$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)M$，M是$k$阶矩阵，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$线性无关，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$线性无关$\Leftrightarrow$M是可逆矩阵。

若$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$，A是$n\times s$矩阵，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是一组基，则$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$的秩等于矩阵A的秩。

设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$与$\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n'$是$n$维线性空间V的两组基，若有

$$\begin{cases} \varepsilon_1'=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n \\ \varepsilon_2'=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{n2}\varepsilon_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n'=a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+\cdots+a_{2n}\varepsilon_n \end{cases},$$

则称

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$到基$\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n'$的过渡矩阵（演化矩阵）。即有 $(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n')=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A$。

若A是n维线性空间V中由基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$到基$\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n'$的过渡矩阵，则A是可逆矩阵。反之，任一个$n$阶可逆矩阵A都可以作为$n$维线性空间V中由一组基到另一组基的过渡矩阵。

关于基的过渡矩阵，还有下列性质：

1）若基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$到基$\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n'$的过渡矩阵是A，则$\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n'$到$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$的过渡矩阵是$A^{-1}$。

2）若基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$到基$\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n'$的过渡矩阵是

A，基$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$到基$\varepsilon_1'',\varepsilon_2'',\cdots,\varepsilon_n''$的过渡矩阵是B，则$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots,\ \varepsilon_n$到$\varepsilon_1'',\varepsilon_2'',\cdots,\ \varepsilon_n''$的过渡矩阵是AB。

3）若基$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots,\ \varepsilon_n$到基$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$的过渡矩阵是A，基$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots,\ \varepsilon_n$到基$\varepsilon_1'',\varepsilon_2'',\cdots,\varepsilon_n''$的过渡矩阵是B，则$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$到$\varepsilon_1'',\varepsilon_2'',\cdots,\varepsilon_n''$的过渡矩阵是$A^{-1}B$。

下面给出坐标变换公式。

设向量α在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标是$X'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，而$\alpha$在基$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$下的坐标是$Y'=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，并且，基$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots,\ \varepsilon_n$到基$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\ \varepsilon_n'$的过渡矩阵是A，则

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

或 $$X=AY,\quad Y=A^{-1}X.$$

Ⅳ 线性子空间及其交、和、直和

一 线性子空间

设V是数域F上的线性空间，W是V的非空子集合。若W对于V的两种运算也作成数域F上的线性空间，则称W是V的一个线性子空间，简称为子空间。

数域F上的线性空间V的非空子集合W作成V的子空间⇔（1）$\alpha+\beta\in W,\ \forall\alpha,\ \beta\in W$；2）$k\alpha\in W,\ \forall k\in F,\ \forall\alpha\in W$）⇔（$k_1\alpha+k_2\beta\in W,\ \forall k_1,k_2\in F,\ \forall\alpha,\ \beta\in W$）。

任意线性空间V都有子空间：零空间{0}与自身V，称为平凡子空间，而其它的子空间（若还有的话）称为非平凡子空间。

线性空间V的子空间W有如下性质：

1）子空间W的零向量0_W与整个空间V的零向量0_V一致，即$0_W=0_V=0$；

2）子空间W的任一向量α在W中的负向量$-\alpha_W$与在整个空

间V中的负向量$-\alpha_V$一致，即$-\alpha_W=-\alpha_V=-\alpha$；

3）子空间的维数不超过整个空间的维数（认为有限维小于无限维）。

设V是数域F上的n维线性空间，W是V的m维子空间，α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_m是W的一组基，则这组向量必定可以扩充为整个空间的基。即，在V中必定可以找到$n-m$个向量α_{m+1}，α_{m+2}，$\cdots$，α_n，使得$\alpha_1,\cdots$，α_m，α_{m+1}，$\alpha_{m+2},\cdots$，α_n是V的一组基。

二　线性包与生成向量组

设V是数域F上的线性空间，任取α_1，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_s\in V$。作

$$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_s)=\left\{\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i\ \middle|\ k_i\in F\right\},$$

则$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$是V的子空间。

称$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_s)$是由$\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_s$所生成（张成）的子空间，或称为$\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_s$的线性包，称$\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_s$是$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_s)$的生成向量组，每个$\alpha_i$称为生成元。

$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_s)$是V中所有包含$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的子空间的最小者，它似乎紧紧地把$\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_s$包住，起着“最小上界”的作用，所以称为线性包。确切地说，它有如下三条性质：

1）$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots\alpha_s)$是V的子空间；

2）$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\supseteq\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$

3）若W是V的子空间，且$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_s\}\subseteq W$，则$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\ \alpha_s)\subseteq W$。

线性还包有如下性质：

1）$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_s)=L(\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_t)\Leftrightarrow\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots,\alpha_s$与$\beta_1$，$\beta_2,\cdots$，$\beta_t$等价。

2）$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_s)$的维数等于$\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_s$的秩，矩阵的行(列)向量生成的子空间称为它的行(列)空间。

三　子空间的交与和

若W_1，W_2是线性空间V的子空间，则

$$W_1\cap W_2=\{\alpha|\alpha\in W_1,\ \alpha\in W_2\}$$

是V的子空间。$W_1\cap W_2$称为W_1与W_2的交。

子空间的交具有性质：

1）$W_1\cap W_2\subseteq W_1$，$W_1\cap W_2\subseteq W_2$；

2）$W_1\cap W_2=W_2\cap W_1$；

3）$(W_1\cap W_2)\cap W_3=W_1\cap(W_2\cap W_3)$；

4）$\bigcap\limits_{i=1}^{s}W_i=W_1\cap W_2\cap\cdots\cap W_s=\left(\bigcap\limits_{i=1}^{t}W_i\right)\cap\left(\bigcap\limits_{j=t+1}^{s}W_j\right)$.

若W_1，W_2是线性空间V的子空间，则

$$W_1+W_2=\{\alpha_1+\alpha_2|\alpha_1\in W_1,\ \alpha_2\in W_2\}$$

是V的子空间。W_1+W_2称为W_1与W_2的和。

子空间的和具有性质：

1）$W_1\subseteq W_1+W_2$，$W_2\subseteq W_1+W_2$；

2）$W_1+W_2=W_2+W_1$；

3）$(W_1+W_2)+W_3=W_1+(W_2+W_3)$；

4）$\sum\limits_{i=1}^{s}W_i=W_1+W_2+\cdots+W_s=\left(\sum\limits_{i=1}^{t}W_i\right)+\left(\sum\limits_{j=t+1}^{s}W_j\right)$；

5）$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_s)+L(\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_t)=$
$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\ \alpha_s,\ \beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_t)$.

子空间的交与和，具有性质：

1）$W\subseteq W_1$，$W\subseteq W_2\Rightarrow W\subseteq W_1\cap W_2$，
$W_1\subseteq N$，$W_2\subseteq N\Rightarrow W_1+W_2\subseteq N$；

2）$W_1\subseteq W_2\Leftrightarrow W_1\cap W_2=W_1\Leftrightarrow W_1+W_2=W_2$；

3）$W_1\cap(W_2+W_3)\supseteq(W_1\cap W_2)+(W_1\cap W_3)$；

4）$W_1\cap((W_1\cap W_2)+W_3)=(W_1\cap W_2)+(W_1\cap W_3)$；

5）$(W_1+W_2)\cap(W_1+W_3)=W_1+((W_1+W_2)\cap W_3)$.

对于有限维线性空间的子空间，有下列的维数公式：

1）$dim(W_1+W_2)=dimW_1+dimW_2-dim(W_1\cap W_2)$；

2）$dim\left(\sum\limits_{i=1}^{s}W_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{s}dimW_i-\sum\limits_{i=2}^{s}dim(W_i\cap\sum\limits_{j=1}^{i-1}W_j)$.

两个子空间W_1与W_2的和是V的同时包含W_1与W_2的子空间的最小者，它起着"最小上界"的作用，从而，子空间的和与线性包在这种意义下是类似的。实际上，两个有限维的子空间的和就是这两个子空间的基所生成的线性包。

四　直和与补空间

设W_1，W_2是线性空间V的子空间。若和$W=W_1+W_2$中每个向量α的分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1\in W_1,\ \alpha_2\in W_2$$

是唯一的，则称该和为直和，记作$W=W_1\oplus W_2$。

设W_1，W_2是线性空间V的子空间，$W=W_1+W_2$，则下列诸条件等价：1）$W=W_1\oplus W_2$；2）零向量的分解式唯一；3）某一向量α_0的分解式唯一；4）$W_1\cap W_2=\{0\}$；5）$dimW=dimW_1+dimW_2$；6）W_1的一基与W_2的一基合起来即为W的一基。

设V是数域**F**上的线性空间，W是V的子空间。若有V的子空间U，使得$V=W\oplus U$，则称U是W的补空间（余子空间）。

n维线性空间V的任一子空间均有补空间。

设$W_1,W_2,\cdots,W_s$是线性空间V的子空间。若和$W=W_1+W_2+\cdots+W_s$中每个向量α的分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\ \alpha_i\in W_i(i=1,2,\cdots,s)$$

是唯一的，则称该和为直和，记作$W=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$。

设W_1，$W_2,\cdots$，W_s是线性空间V的子空间，$W=W_1+W_2+\cdots+W_s$，则下列诸条件等价：1）$W=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$；2）零向量的分解式唯一；3）某一向量$\alpha_0$的分解式唯一，4）

$W_i\cap\sum\limits_{j\neq i}W_j=\{0\}$，$i=1, 2,\cdots, s$；5）$W_i\cap\sum\limits_{j=1}^{i-1}W_j=\{0\}$，$i=2, 3,\cdots, s$；6）将$W_1, W_2,\cdots, W_s$任意分为两组$W_{i_1},\cdots, W_{i_k}$与$W_{j_1},\cdots, W_{j_l}$，$k+l=s$，$1\leqslant k\leqslant s-1$，均有$(W_{i_1}+\cdots+W_{i_k})\cap(W_{j_1}+\cdots+W_{j_l})=\{0\}$；7）$dimW=dimW_1+dimW_2+\cdots+dimW_s$；8）各取$W_1, W_2,\cdots, W_s$的一基，合起来即为W的一基。

关于多个子空间的直和，还有性质：若有子空间的和式

$$W=W_1+W_2+\cdots+W_s \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}W_1&=W_{11}+W_{12}+\cdots+W_{1m_1}\\W_2&=W_{21}+W_{22}+\cdots+W_{2m_2}\\&\cdots\cdots\\W_s&=W_{s1}+W_{s2}+\cdots+W_{sm_s}\end{aligned}\right\}\quad (2)$$

则有子空间的和式

$$W=W_{11}+\cdots+W_{1m_1}+W_{21}+\cdots+W_{2m_2}+\cdots+W_{s1}+\cdots+W_{sm_s} \quad (3)$$

并且，(3)为直和⇔(2)与(1)均为直和。

§3 重点难点

本章的主题词是：集合，映射，单位映射（恒等映射），可逆映射；线性空间（向量空间），向量，零向量，负向量，线性相关，线性无关，向量组的秩，维数，有限维线性空间，无限维线性空间；基（基底、底），坐标，同构映射，线性空间同构，过渡矩阵（演化矩阵），坐标变换；线性子空间，平凡子空间，生成子空间（线性包），矩阵的行（列）空间，零空间，子空间的交，子空间的和，维数公式，直和，补空间（余子空间）

本章的基本方法是：集合相等的证明方法，映射相乘及求逆映射的方法，线性空间判定方法，确定基与维数的方法，向量坐标求法，过渡矩阵求法，坐标变换法，子空间判定方法，子空间交与和的求法，子空间直和判定方法。

本章的重点是：线性空间的定义，基与基变换，子空间的和与直和。

线性空间的定义由公理的形式给出，它是本章讨论问题的基础与出发点。线性空间的性质的推导，其它一些概念的建立，都直接或间接地依赖于线性空间的定义。因此，线性空间的定义成为本章的一个重点。

在有限维线性空间的理论中，基占有中心地位。若有限维线性空间V不是零空间，则V含有无限多个向量，取定V的一组基后，V中任一向量都可以由这有限个基向量线性表出，从而实现了从无限到有限的转化。维数就是一组基中所含向量的个数。向量的坐标是对某一组确定的基而言的。数域$\mathbf{F}$上的n维线性空间V到$\mathbf{F}^n$的同构映射是在取定基的情况下建立的.基也是线性子空间的一个研究内容。总之，基作为一个重要概念，既贯穿于线性空间理论的始终，又是处理问题的一个基本工具。同时，基的概念既是向量组极大无关组概念的深化，又是以后几章中建立线性变换与矩阵的一一对应的桥梁.另外,基变换是一种重要的方法，过渡矩阵从量的方面刻划了基变换，基变换引起坐标变换，以后几章中常常用到基变换.因此,基与基变换成为本章的一个重点。

线性子空间的和，是本章的一个重要内容，占有较多的篇幅，其中直和的概念更为重要。将线性空间分解为其子空间的直和，是一种重要的研究方法，在以后的讨论中还要多次用到。另外，和与直和的思考方法，是代数学中的重要方法，其实质就是由局部来研究整体，在代数学的其它分支中也经常用到。因此，子空间的和与直和成为本章的一个重点。

本章的难点是：线性空间的同构，维数公式，子空间的直和．

同构映射的定义中首先用到了映射的概念，而映射概念本身是较难理解的；其次，不但要求映射是双射，而且还要求保持线性运算，这样将映射与运算联系起来，是较为复杂的．另外，具体建立两个给定线性空间之间的一个同构映射是较为困难的工作，尤其对于无限维线性空间更是如此，没有一般的方法，而仅仅依赖于灵活性与技巧性．因此，线性空的同构成为本章的一个难点．解决困难的方法是：1）分析同构映射的定义，熟悉其各条要求；2）通过证明数域F上的n维线性空间V与F^n同构，紧扣同构映射的各条要求，进一步加深理解；3）研究一些具体例子，总结证明同构的方法与技巧．

维数公式，尤其是推广了的维数公式，不容易证明，更不容易得到，并且，证明的过程也较长．因此，维数公式成为本章的一个难点．解决困难的方法是：1）反复推敲证明过程，真正弄懂，归纳出主要思路；2）找两个具体的子空间，算出维数，验证维数公式，从而，增加感性认识，并有助于牢记公式；3）分析维数公式的推广过程，并结合两个子空间的情况去思考，两个子空间时的关键是从它们交的基出发．

子空间的直和，是在和的基础上附加条件得出的，不容易理解，而且，相互等价的条件很多，比较复杂．因此，子空间的直和成为本章的一个难点．解决困难的方法是：1）从交为{0}的条件出发，体会子空间之间的关系，理解直和的含义；2）通过研究熟悉的例子来加深理解；3）通过研究各种等价条件，反回来进一步理解直和的定义．

§4 习题类解

I 计算题

一 映射的乘法

根据映射的乘法的定义求出乘积。

例 1 已知$\sigma: x \mapsto 3x$，$\tau: x \mapsto 3x+1$是**R**到**R**的两个映射，求$\sigma\tau$与$\tau\sigma$。

解 对任意$x \in$ **R**，$(\sigma\tau)(x)=\sigma(\tau(x))=\sigma(3x+1)=3(3x+1)=9x+3$，$(\tau\sigma)(x)=\tau(\sigma(x))=\tau(3x)=3(3x)+1=9x+1$。

二 线性空间

判定所给的集合对于所给的法则是否作成线性空间，要从定义出发得出结论，并且，当作成线性空间时要逐条验证，当不作成线性空间时举反例说明某一条不成立。

例 2 按照矩阵的加法及数与矩阵的乘法，下列集合是否构成**F**上的线性空间：

1）**F**上所有$m \times n$矩阵的集合V_1；

2）**F**上所有n阶可逆矩阵的集合V_2。

解 1）V_1作成**F**上的线性空间。

首先，$0=(0)_{mn} \in V_1$，V_1非空。

其次，对于任意$A=(a_{ij})_{mn}$，$B=(b_{ij})_{mn} \in V_1$，$k \in$ **F**，$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{mn} \in V_1$，$kA=(ka_{ij})_{mn} \in V_1$。

再次，对于任意A，B，$C \in V_1$，k，$l \in$ **F**，由矩阵的运算性质知，成立：1）$A+B=B+A$；2）$(A+B)+C=A+(B+C)$；3）存在$0=(0)_{mn} \in V_1$，$A+0=(a_{ij}+0)_{mn}=(a_{ij})_{mn}=A$；4）对任意$A=(a_{ij})_{mn} \in V_1$，存在$-A=(-a_{ij})_{mn} \in V_1$，使得$A+(-A)=(a_{ij}+(-a_{ij}))_{mn}=(0)_{mn}=0$；5）$k(A+B)=kA+kB$；6）$(k+l)A=kA+lA$；7）$k(lA)=(kl)A$；8）$1A=A$。

2）V_2不作成**F**上的线性空间。

$A=E$，$B=-E \in V_2$，但$A+B=0 \notin V_2$。

三 基与维数

求线性空间的维数，一般地，需要求出它的一组基。而求一组基，只有根据基的定义去寻找，在一般情况下，没有固定的程序，视具体情况而定。

例 3 设V是数域F上的全体n阶对称矩阵所作成的线性空间，试求dimV。

解 设E_{ij}是第i行第j列的元素为1，而其元素均为零的n阶矩阵，则E_{11}，E_{22}，…，$E_{nn}\in V$。又设$H_{ij}=E_{ij}+E_{ji}$，$1\leqslant i<j\leqslant n$，则$H_{ij}'=E_{ji}+E_{ij}=H_{ij}$，从而$H_{ij}\in V$。易证$E_{11}$，$E_{22}$，…，$E_{nn}$；$H_{12}$，$H_{13}$，…，$H_{1n}$；$H_{23}$，$H_{24}$，…，$H_{2n}$；…；$H_{n-1,n}$是V的一组基，从略。所以$din V=n+(n-1)+\cdots+1=n(n+1)/2$。

例 4 试求**Q**上的线性空间

$V=\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}\,|\,a,b,c,d\in\mathbf{Q}\}$的维数。

解 证明1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$是V的一组基，

1）1，$\sqrt{2}$线性无关。设$k_1+k_2\sqrt{2}=0$，则必有$k_2=0$。若不然，$k_2\neq0$，有$\sqrt{2}=-k_1/k_2$，与$\sqrt{2}$是无理数矛盾。从而$k_1=0$，

2）1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$线性无关。设$l_1+l_2\sqrt{2}+l_3\sqrt{3}=0$，则可得$l_1+l_2\sqrt{2}=-l_3\sqrt{3}$，两边平方后得到$(l_1^2+2l_2^2-3l_3^2)+2l_1l_2\sqrt{2}=0$，由于1，$\sqrt{2}$线性无关，所以$l_1l_2=0$，$l_1^2+2l_2^2-3l_3^2=0$，若$l_1\neq0$，则$l_2=0$，且$l_1^2-3l_3^2=0$，与$\sqrt{3}$是无理数矛盾。同理$l_2\neq0$也不可能，所以$l_1=l_2=0$，从而$l_3=0$。

3）1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$线性无关。设$t_1+t_2\sqrt{2}+t_3\sqrt{3}+t_4\sqrt{6}=0$，则可得$t_1+t_2\sqrt{2}=-\sqrt{3}(t_3+t_4\sqrt{2})$。若$t_3$，$t_4$中有一个不为0，则可得$\dfrac{t_1+t_2\sqrt{2}}{t_3+t_4\sqrt{2}}=-\sqrt{3}$，经分母有理

化后可得：$a+b\sqrt{2}=-\sqrt{3}$，a，$b\in\mathbf{Q}$，与已证明的1）矛盾．所以$t_3=t_4=0$，从而$t_1=t_2=0$。

因此，$dimV=4$。

四　基变换与坐标变换

求过渡矩阵的方法是：1）根据过渡矩阵的定义直接求出；2）引入第三组基，根据过渡矩阵的性质求出。

求一向量在给定基下的坐标，方法是：1）将所给向量表示为基的线性组合，通过解线性方程组求得组合的系数，即为所求的坐标；2）借助于过渡矩阵，用坐标变换公式求出。

例5　在$\mathbf{F}^4$中求基ε_1，ε_2，ε_3，ε_4到基η_1，η_2，η_3，η_4的过渡矩阵，其中

$$\begin{cases}\varepsilon_1=(1,1,1,1)\\ \varepsilon_2=(1,1,-1,-1)\\ \varepsilon_3=(1,-1,1,-1)\\ \varepsilon_4=(1,-1,-1,1),\end{cases}\qquad \begin{cases}\eta_1=(1,1,0,1)\\ \eta_2=(2,1,3,1)\\ \eta_3=(1,1,0,0)\\ \eta_4=(0,1,-1,-1).\end{cases}$$

解　取$\mathbf{F}^4$的基 $\varepsilon_1'=(1,0,0,0)$，$\varepsilon_2'=(0,1,0,0)$，$\varepsilon'_3=(0,0,1,0)$，$\varepsilon_4'=(0,0,0,1)$。设$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3'$，$\varepsilon_4'$　到$\varepsilon_1,\varepsilon_2$，$\varepsilon_3$，$\varepsilon_4$与$\eta_1$，$\eta_2$，$\eta_3$，$\eta_4$的过渡矩阵分别为A与B，则

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-1\\1&1&0&-1\end{pmatrix},$$

从而，ε_1，ε_2，ε_3，ε_4到η_1，η_2，η_3，η_4的过渡矩阵是

$$A^{-1}B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&7&2&-1\\1&-1&2&3\\-1&3&0&-1\\1&-1&0&-1\end{pmatrix}.$$

例6　在$\mathbf{F}^4$中，试求 $\alpha=(1,2,1,1)$在基 $\varepsilon_1=(1,1,1,1)$，

$\varepsilon_2=(1, 1, -1, -1)$, $\varepsilon_3=(1, -1, 1, -1)$, $\varepsilon_4=(1, -1, -1, 1)$下的坐标。

解 1 设$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3+x_4\varepsilon_4$，则

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3-x_4=2 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=1, \end{cases}$$

解得，$x_1=5/4$，$x_2=1/4$，$x_3=x_4=-1/4$，这就是α在ε_1，ε_2，ε_3，ε_4下的坐标。

解 2 $\alpha=(1, 2, 1, 1)$在基$\varepsilon_1'=(1, 0, 0, 0)$，$\varepsilon_2'=(0,1,0,0)$，$\varepsilon_3'=(0,0,1,0)$，$\varepsilon_4'=(0,0,0,1)$下的坐标是1,2,1,1。设$\alpha$在$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$，$\varepsilon_3$，$\varepsilon_4$下的坐标是$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，则由$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3',\varepsilon_4'$到$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$，$\varepsilon_3$，$\varepsilon_4$的过渡矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

得到

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

五　生成子空间

求$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$的基与维数，也就是要求出$\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_s$的一个极大无关组。

例 7 设$\alpha_1=(2,1,3,1)$，$\alpha_2=(1,2,0,1)$，$\alpha_3=(-1, 1, -3,0)$，$\alpha_4=(1,1,1,1)$，试求$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的一组基与维数。

解 以α_1，α_2，α_3，α_4为列作矩阵A，并且，对A进行初等行变换，得到

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&2&1&1\\3&0&-3&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&3&1\\-1&0&2&0\end{pmatrix}=B,$$

从而，α_1，α_2，α_4为一极大无关组．因此，$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的一组基是$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_4$，维数为3．

六　子空间的交与和

因为，$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$，所以，求和的基与维数，与上面的问题五相同．

求$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\cap L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$的基与维数的一般方法是：先用维数公式确定出交的维数k，再求出其向量的一般形状，而后从中找到k个线性无关的向量即为一组基．

例8　设$\alpha_1=(1,2,1,0)$，$\alpha_2=(-1,1,1,1)$，$\beta_1=(2,-1,0,1)$，$\beta_2=(1,-1,3,7)$，试求$L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$的一组基与维数．

解　1）$L(\alpha_1,\alpha_2)$为2维的，$L(\beta_1,\beta_2)$为2维的，可求得$L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)$为3维的，从而，由维数公式得$L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$为1维的．

2）若$\alpha\in L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$，则可设$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha=-y_1\beta_1-y_2\beta_2$，即$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+y_1\beta_1+y_2\beta_2=0$，得方程组

$$\begin{cases}x_2-x_2+2y_1+y_2=0\\2x_1+x_2-y_1-y_2=0\\x_1+x_2\qquad 3y_2=0\\\qquad x_2+y_1+7y_2=0,\end{cases}$$

解得$x_1=y_2$，$x_2=-4y_2$，$y_1=-3y_2$，y_2为任意数，从而$\alpha=y_2\alpha_1-4y_2\alpha_2=3y_2\beta_1-y_2\beta_2$．

3）上面方程组的系数矩阵的秩为3，其基础解系由一个解向量组成，取$(1,-4,-3,1)$，从而$\alpha=\alpha_1-4\alpha_2=3\beta_1-\beta_2=$

$(5,-2,-3,4)$. 因此，$(5,-2,-3,4)$是$L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$的一组基。

Ⅱ 证明题

一 集合与映射

证明集合M与N相等的一般方法是：先证明$M\subseteq N$，再证明$N\subseteq M$，从而就有$M=N$。

关于映射的证明，一般根据定义进行验证。

例 1 设$f(x)$，$g(x)\in \mathbf{F}[x]$，$d(x)=(f(x),g(x))$，证明 $\{u(x)f(x)+v(x)g(x)\mid u(x),v(x)\in \mathbf{F}[x]\}=\{w(x)d(x)\mid w(x)\in \mathbf{F}[x]\}$。

证明 为叙述方便，记$M=\{u(x)f(x)+v(x)g(x)\mid u(x),v(x)\in \mathbf{F}[x]\}$，$N=\{w(x)d(x)\mid w(x)\in \mathbf{F}[x]\}$。

先证明$M\subseteq N$。记$f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$。对于M中的任元素$\alpha=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，有

$$\begin{aligned}\alpha&=u(x)d(x)f_1(x)+v(x)d(x)g_1(x)\\&=(u(x)f_1(x)+v(x)g_1(x))d(x)\end{aligned}$$

所以$\alpha\in N$，$M\subseteq N$。

再证$N\subseteq M$。因为$d(x)=(f(x),g(x))$，所以，根据最大公因式的性质，存在$u_0(x)$，$v_0(x)\in \mathbf{F}[x]$，使得$d(x)=u_0(x)f(x)+v_0(x)g(x)$.对于N中的任意元素$\beta=w(x)d(x)$,有$\beta=w(x)(u_0(x)f(x)+v_0(x)g(x))=(w(x)u_0(x))f(x)+(w(x)v_0(x))g(x)$，所以$\beta\in M$，$N\subseteq M$。

因此，$M=N$。

例 2 设

$$\sigma:M_n(\mathbf{F})\to M_n(\mathbf{F}),\ \sigma(A)=A',\ \forall A\in M_n(\mathbf{F}),$$

证明σ是一个双射。

证明 显然，σ是映射。任取$A\in M_n(\mathbf{F})$，则$A'\in M_n(\mathbf{F})$ $\sigma(A')=(A')'=A$，所以，σ是满射。对于任意的 A，$B\in$

$M_n(F)$，若$A\neq B$，则$A'\neq B'$，即$\sigma(A)\neq\sigma(B)$，所以，σ是单射。因此，σ是一个双射。

二　线性空间

要证明一个非空集合V作成数域**F**上的线性空间，必须按定义逐条逐点进行检验；而当证明V不作成**F**上的线性空间时，只要指出不符合定义中的某一个条件，并且只要通过具体例子指出就可以了。

例 3　设V是正实数的集合，规定：对于任意的α，$\beta\in V$，$\alpha\oplus\beta=\alpha\beta$；对于任意的$\alpha\in V$，任意的$k\in\mathbf{R}$，$k\circ\alpha=\beta^k$，证明V是**R**上的线性空间。

证明　V显然非空，并且，所规定的两个法则分别是V的加法与**R**和V的数量乘法。

又，对于任意α，β，，$\gamma\in V$，任意k，$l\in\mathbf{R}$，有

1）$\alpha\oplus\beta=\alpha\beta=\beta\alpha=\beta\oplus\alpha$；

2）$(\alpha\oplus\beta)\oplus\gamma=(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)=\alpha\oplus(\beta\oplus\gamma)$；

3）$1\oplus\alpha=1\alpha=\alpha$，1是V中的零向量；

4）$\frac{1}{\alpha}\oplus\alpha=\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha=1$，$\frac{1}{\alpha}\in V$是$\alpha$的负向量；

5）$k\circ(\alpha\oplus\beta)=k\circ(\alpha\beta)=(\alpha\beta)^k=\alpha^k\beta^k=(k\circ\alpha)\oplus(k\circ\beta)$；

6）$(k+l)\circ\alpha=\alpha^{k+l}=\alpha^k\alpha^l=(k\circ\alpha)\oplus(l\circ\alpha)$；

7）$k\circ(l\circ\alpha)=k\circ(\alpha^l)=(\alpha^l)^k=\alpha^{lk}=\alpha^{kl}=(kl)\circ\alpha$；

8）$1\circ\alpha=\alpha^1=\alpha$。

因此，V作成**R**上的线性空间。

例 4　设n是固定正整数，V是数域**F**上所有次数等于n的多项式的集合。证明V对于多项式的加法及数与多项的乘法不作成**F**上的线性空间。

证明　x^n，$-x^n\in V$，但$x^n+(-x^n)=0\notin V$。因此，V不作成**F**上的线性空间。

三　线性相关性

关于向量线性相关性的证明，一般方法是：从向量的线性组合为零向量的等式出发，应用已知条件求得组合系数的性质，得到所要的结论。在证明过程中注意使用有关的性质。

例 5　设V是数域F上的线性空间。若α，$\beta\in V$，且线性无关，又$x\in V$且$x\neq 0$，证明α，x与β，x中至少有一组线性无关。

证明　用反证法。设α，x与β，x均线性相关，则$\alpha=c_1x$，$\beta=c_2x$，c_1，$c_2\in F$。由α，β线性无关得$\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$，从而$c_1\neq 0$，$c_2\neq 0$。但由$\alpha=c_1x$，$\beta=c_2x$得$\alpha-\dfrac{c_1}{c_2}\beta=c_1x-c_1x=0$，从而$\alpha$，$\beta$线性相关，引出矛盾。因此，$\alpha$，$x$与$\beta$，$x$中至少有一组线性无关。

例 6　设$A\in M_n(F)$，m是大于1的整数，使得$A^{m-1}\neq 0$但$A^m=0$。证明：F^n中有(列)向量α，使$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{m-1}\alpha$线性无关。

证明　1）先找到α。为此，设

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

则至少有一个ε_i，使$A^{m-1}\varepsilon_i\neq 0$。否则，若$A^{m-1}\varepsilon_j=0$，$j=1,2,\cdots,n$，则有

$$A^{m-1}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}=0,$$

即$A^{m-1}=0$，引出矛盾。记$\varepsilon_i=\alpha$，则$A^{m-1}\alpha\neq 0$。

2）设有$k_0\alpha+k_1A\alpha+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}\alpha=0$，则$k_0=k_1=\cdots=k_{m-1}=0$。否则，设$k_i$是$k_0$，$k_1,\cdots$，$k_{m-1}$中第一个不为零的数，则有$k_iA^i\alpha+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}\alpha=0$，用$A^{m-i-1}$乘该等式两

端，得$k_i A^{m-1}\alpha=0$，从而$A^{m-1}\alpha=0$，引出矛盾。因此，F^n中有α，使α，$A\alpha$，…，$A^{m-1}\alpha$线性无关。

四 基与维数

证明一组向量作成线性空间V的基，要按照基的定义证明两个方面：该组向量线性无关，V的任一向量可由该组向量线性表出；证明线性空间V的维数是n，一般要选出V的n个向量，并证明这n个向量作成V的一组基。

例7 设V，W是数域F上的两个线性空间，且$dimV=n>0$，$dimW=m>0$。作$V\times W=\{(x,y)|x\in V, y\in W\}$，并且规定：$(x,y)=(x_1,y_1)$当且仅当$x=x_1$，$y=y_1$，$(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，$k\odot(x,y)=(kx,ky)$，$k\in F$。证明：1）$V\times W$对于$\oplus$，$\odot$作成F上的线性空间，2）$dim(V\times W)=dimV+dimW$。

证明 1）根据线性空间的定义验证，从略。

2）设x_1，x_2，…，x_n与y_1，y_2，…，y_m分别是V与W的一组基，则$(x_1,0)$，$(x_2,0)$，…，$(x_n,0)$，$(0,y_1)$，$(0,y_2)$，…，$(0,y_m)$是$V\times W$的一组基。

首先，设$k_1,k_2,\cdots,k_n,l_1,l_2,\cdots,l_m\in F$，使$\sum_{i=1}^{n}k_i(x_i,0)\oplus\sum_{j=1}^{m}l_j(0,y_j)=(0,0)$，则$\left(\sum_{i=1}^{n}k_ix_i,\ \sum_{j=1}^{m}l_jy_j\right)=(0,0)$，$\sum_{i=1}^{n}k_ix_i=0$，$\sum_{j=1}^{m}l_jy_j=0$，从而$k_1=k_2=\cdots=k_n=0,l_1=l_2=\cdots=l_m=0$。所以，这$n+m$个向量线性无关。

其次，对于任意的$(\alpha,\beta)\in V\times W$，由$\alpha\in V$，$\beta\in W$得$\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$，$\beta=\sum_{j=1}^{m}b_jy_j$，$a_i,b_j\in F$，$i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,$

m，从而，$(\alpha,\beta)=$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i,\ \sum_{j=1}^{m}b_jy_j\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i,0)\oplus\sum_{j=1}^{m}b_j(0,y_j).$$

因此，这$n+m$个向量作成$V\times W$的一组基，$dim(V\times W)=n+m=dim+dimW$。

五　同构

证明线性空间同构的一般方法是：构造一个映射，而后按定义验证该映射是同构映射。对于有限维的情况，也可以证明维数相等，按定理判定同构。

例8　证明实数域**R**作为自身上的线性空间与例3中的线性空间V同构。

证明1　对于V，1是其零向量。取$a\in V$，$a\neq 1$，则a线性无关。又，对于任意$b\in V$，有$k=\log_a b$，使$b=k\circ a$。所以，a作成V的一组基，从而，V是一维的。而**R**作为其自身上的线性空间也是一维的。因此，根据定理知，$\mathbf{R}\cong V$。

证明2　作σ：$\mathbf{R}\to V$，$\sigma(x)=2^x$，$\forall x\in\mathbf{R}$。显然，σ是映射，且易证是双射，从略。又，对任意的x，$y\in\mathbf{R}$，$k\in\mathbf{R}$，有

$$\sigma(x+y)=2^{x+y}=2^x2^y=2^x\oplus 2^y=\sigma(x)\oplus\sigma(y),$$
$$\sigma(kx)=2^{kx}=(2^x)^k=k\circ 2^x=k\circ\sigma(x).$$

因此，σ是同构映射，从而$\mathbf{R}\cong V$。

六　线性子空间

关于线性子空间的证明题，有如下几种类型：1）关于线性空间的子集作成子空间的问题，只要证明子集非空且对于线性运算封闭；2）关于子空间相等、包含关系的问题，按集合的相等、包含关系来证明，只是要注意应用线性子空间及其交与和的性质；3）子空间的基与维数的问题，按前面的第四部分所述方法进行；4）关于维数公式的证明题；5）关于某些向量与子空间的

关系的证明题，6）关于子空间的直和的问题，一般要先证明是和，再证明零向量表法唯一或交所具有的性质，对于有限维的情况也常常利用维数间的关系来证明.

例9 设W,W_1,W_2都是线性空间V的子空间，$W_1\subseteq W_2$，$W\cap W_1=W\cap W_2$，$W+W_1=W+W_2$，证明$W_1=W_2$。

证明 只要证明$W_2\subseteq W_1$。对于任意$\alpha_2\in W_2$，由$\alpha_2\in W_2\subseteq W+W_2=W+W_1$得，$\alpha_2=\alpha+\alpha_1$，其中$\alpha\in W$，$\alpha_1\in W_1$，从而$\alpha_2-\alpha_1=\alpha\in W$。又，$\alpha_1\in W_1\subseteq W_2$，所以，$\alpha=\alpha_2-\alpha_1\in W_2$，从而$\alpha=\alpha_2-\alpha_1\in W\cap W_2=W\cap W_1$，$\alpha\in W_1$，$\alpha_2=\alpha+\alpha_1\in W_1$.

说明 本例说明对于子空间的和与交，消去律均不成立。

例10 设W_1,W_2是线性空间V的子空间，证明 $W_1\cup W_2$是V的子空间$\Leftrightarrow W_1\subseteq W_2$或$W_2\subseteq W_1$。

证明 $\Rightarrow$. 用反证法. 设$W_1\subsetneq W_2$且$W_2\subsetneq W_1$，则有$\alpha_1\in W_1$但$\alpha_1\notin W_2$，并且有$\alpha_2\in W_2$但$\alpha_2\notin W_1$。由于$\alpha_1,\alpha_2\in W_1\cup W_2$，又$W_1\cup W_2$是子空间，所以$\alpha_1+\alpha_2\in W_1\cup W_2$，从而$\alpha_1+\alpha_2=\beta\in W_1$或$\beta\in W_2$。若$\beta\in W_1$，则$\alpha_2=\beta-\alpha_1\in W_1$，引出矛盾；若$\beta\in W_2$，则同样引出矛盾. 因此，$W_1\subseteq W_2$或$W_2\subseteq W_1$。

$\Leftarrow$. 显然。

例11 设$V_1,V_2,\cdots,V_s$是线性空间V的s个非平凡子空间，证明V中至少有一个向量不属于$V_1,V_2,\cdots,V_s$中的任何一个.

证明 对于空间的个数s作数学归纳法。当$s=1$时，由V_1是非平凡子空间知，有向量$\alpha\notin V_1$时，结论成立.

设$s=k$时结论成立. 对于$s=k+1$，有V的$k+1$个非平凡子空间$V_1,V_2,\cdots,V_k,V_{k+1}$。由归纳假设，对于$V_1,V_2,\cdots,V_k$，至少有一个向量$\alpha$不属于其中任何一个$V_i$($i=1,2,\cdots,k$). 若$\alpha\notin V_{k+1}$，则结论成立；若$\alpha\in V_{k+1}$，则有$\beta\notin V_{k+1}$，考虑下列$k+1$个向量的向量组：

$$\alpha+\beta,\ 2\alpha+\beta,\ 3\alpha+\beta,\ \cdots,\ (k+1)\alpha+\beta, \qquad (*)$$

其中必有一个向量不属于$V_1, V_2, \cdots, V_k$这k个子空间中的任一个．若不然，则一定有两个向量属于某个$V_j(1\leqslant j\leqslant k)$，从而这两个向量差为$m\alpha(0<|m|\leqslant k)$属于$V_j$，与$\alpha\notin V_j$矛盾．所以，(*)中有向量，不妨设为$\gamma=l\alpha+\beta$，不属于$V_1, V_2, \cdots, V_k$中的任一个．又，由$\alpha\in V_{k+1}$，$\beta\notin V_{k+1}$，则$l\alpha+\beta\notin V_{k+1}$，结论成立．

例12 设$W=\{A|A\in M_n(\mathbf{F}), A'=A\}$，$W_2=\{A|A\in M_n(\mathbf{F}), A'=-A\}$，证明：1）$W_1, W_2$是$M_n(\mathbf{F})$的子空间；2）$M_n(\mathbf{F})=W_1\oplus W_2$．

证明 1）易证W_1，W_2作成$M_n(\mathbf{F})$的子空间，从略．

2）对于任意$A\in M_n(\mathbf{F})$，有$A=\frac{1}{2}(A+A')+\frac{1}{2}(A-A')$，令$A_1=\frac{1}{2}(A+A')$，$A_2=\frac{1}{2}(A-A')$，则$A_1'=A_1$，$A_2'=\frac{1}{2}(A'-A)=-\frac{1}{2}(A-A')=-A_2$，所以，$A_1\in W_1$，$A_2\in W_2$．因此，$M_n(\mathbf{F})=W_1+W_2$．

对于$B\in W_1\cap W_2$，有$B\in W_1$，$B=B'$；$B\in W_2, B'=-B$，所以$-B=B$，$2B=0$，$B=0$，从而$W_1\cap W_2=\{0\}$，因此，$M_n(\mathbf{F})=W_1\oplus W_2$．

§5 补充资料

I 无限维线性空间

基的定义．设V是数域**F**上的线性空间，B是V的一个非空子集合．若：1）B中任意有限多个向量均线性无关；2）对于V中的任意向量α，均存在$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\in B$，及$k_1, k_2, \cdots, k_s\in\mathbf{F}$，使得$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$，则称B是V的一基底，简称为基．

基的存在定理．设V是数域**F**上的非零线性空间，则V存在基底．

定义．设B是数域$\mathbf{F}$上的线性空间V的一基．若B为无限集合，则称V是无限维线性空间．

Ⅱ 商空间

定义．设V是数域$\mathbf{F}$上的线性空间，$\alpha\in V$，M是V的一个子空间．若有$\alpha'\in V$，使得$\alpha-\alpha'\in M$，则称α与α'模M同余，记作$\alpha\equiv\alpha'(mod M)$．向量模M同余具有反身性、对称性、传递性．

设α是V中任意向量，作V的子集$\alpha+M=\{\alpha+m|m\in M\}$，则$\alpha\equiv\alpha'(mod M)\Leftrightarrow\alpha'\in\alpha+M$．称$\alpha+M$为一个模M同余类，称$\alpha$是同余类$\alpha+M$的一个代表．

模M的同余类具有性质：1）若$\alpha'\in\alpha+M$，则$\alpha'+M=\alpha+M$．因而，可取$\alpha+M$中任一元素作为它的代表．2）两个模M同余类若不相等，则没有公共元素，即它们的交为空集．因而，V可以分成互不相交的模M同余类的并集．

V中模M同余类的全体用$\widetilde{V}$表示．在$\widetilde{V}$中规定：

1）$(\alpha+M)+(\beta+M)=(\alpha+\beta)+M$，$\forall\alpha,\beta\in V$；

2）$k(\alpha+M)=k\alpha+M$，$\forall\alpha\in V$，$\forall k\in\mathbf{F}$，

则这两个法则与同余类代表的选择无关，换言之，这分别是$\widetilde{V}$的加法、$\mathbf{F}$与$\widetilde{V}$的数量乘法，进而，$\widetilde{V}$对于该加法与该数量乘法作成$\mathbf{F}$上的线性空间，称$\widetilde{V}$是V对于子空间M的商空间，记作V/M．

定理．设V是数域$\mathbf{F}$上的有限维线性空间，M是V的子空间，则$dim(V/M)=dimV-dimM$．

Ⅲ 线性方程组的解空间

含有n个未知量的齐次线性方程组的所有解组成$\mathbf{F}^n$的一个子空间W．若其系数矩阵的秩为r，则W的维数是$n-r$．当$r<n$时，齐次线性方程组的一基础解系就是W的一组基．当$r=n$时，$W=\{0\}$．非齐次线性方程组的解不构成$\mathbf{F}^n$的子空间．对于$\mathbf{F}^n$的任一子空间W，均存在一齐次线性方程组，以W为其解空间．

Ⅳ 历史资料点滴

英国数学家哈密尔顿（1805,8,3—1865,9,2）自1828年开始研究四元数，他在1835年送交爱尔兰科学院的论文《共轭函数或者代数对的理论》中把复数$a+bi$作为实数有序偶(a,b)，进行了详细研究。他进一步考虑表示三个、四个及其它个数的情况，终于在1843年创造了四元数$a+bi+cj+dk$。"向量"一词是他首先引进的，他开创了向量理论和向量计算。他试图创立三维空间的向量代数学，引入"外乘法"或"纯量乘法"，作为一个特殊的向量空间。

德国数学家格拉斯曼（1809,4,18—1877,9,26）在1844年发表《扩张的理论》一文，提出名词"超复数"。n维超复数，可以看作一个n元有序组（$a_1,a_2,\cdots,a_n$），也可认为是一个线性组合$a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$，它是具有单位长度的$n$个"独立的"元素（即单位向量$e_1,e_2,\cdots,e_n$）构成的，而组合的系数$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$都是某个数域中的数。格拉斯曼同时研究了欧几里得多维空间，把点、直线、平面、两点之间的距离推广到空间$\mathbf{R}^n$，包含了一般的n维几何的概念。

维数的概念最初起源于解析几何。1829年，德国数学家普吕克（1801,7,16—1868,5,22）开辟了坐标体系的新领域，导致了维数论的产生。他认为，一种几何的维数就是为这种几何的基本元素定位所需要的独立的坐标的数目。现在，维数论已发展为一个具有相当广度和深度的课题。

1906年，法国数学家弗雷谢（1878—1973）开始了抽象空间的研究，从而，"空间"得到了新的概括，包括所谓"无穷维向量空间"，由此所产生的理论与近代数学的最重要部门如微分方程、积分方程和三角级数等，有密切联系，同时与近代理论物理，首先与量子力学有密切的联系。

§6 基本习题

1 检验以下集合对于所指定的法则是否构成实数域上的线

性空间：

1）全体上三角矩阵，对于矩阵的加法与数乘运算；

2）平面上的全体向量，对于通常的加法和如下定义的数量乘法 $k\alpha=0$；

3）集合与加法同2），但数乘运算定义为 $k\alpha=\alpha$；

4）$V=\{f(x)\mid f(\alpha)=f(\beta)=0,\ f(x)为实函数\}$，对于函数的加法及数与函数的乘法，$\alpha$，$\beta$为固定的实数。

2　求$\mathbf{F}^3$中向量$\alpha=(3,7,,1)$对于基$\alpha_1=(1,3,5)$，$\alpha_2=(6,3,2)$，$\alpha_3=(3,1,0)$的坐标。

3　在$\mathbf{F}^4$中有两组基

$$\begin{cases}\varepsilon_1=(1,0,0,0)\\ \varepsilon_2=(0,1,0,0)\\ \varepsilon_3=(0,0,1,0)\\ \varepsilon_4=(0,0,0,1),\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha_1=(2,1,-1,1)\\ \alpha_2=(0,3,1,0)\\ \alpha_3=(5,3,2,1)\\ \alpha_4=(6,6,1,3),\end{cases}$$

1）求$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$到$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的过渡矩阵；

2）求向量$\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)$关于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的坐标。

4　设$\alpha_1=(1,1,0,0)$，$\alpha_2=(1,0,1,1)$；$\beta_1=(0,0,1,1)$，$\beta_2=(0,1,1,0)$，试求$L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)$的维数与一组基。

5　条件同上题，试求$L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$的一组基。

6　证明：若W是线性空间V的真子空间，$x_1\notin W$，$x_2\in W$，且$x_2\neq 0$，则x_1，x_2线性无关。

7　证明：若W_1，W_2是线性空间V的子空间，$W_1\subseteq W_2$，且$dimW_1=dimW_2$，则$W_1=W_2$。

8　证明：复数域$\mathbf{C}$作为实数域$\mathbf{R}$上的线性空间与$M_2(\mathbf{R})$的子空间$W=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\middle|\,a,b\in\mathbf{R}\right\}$同构。

9　证明：所有与A可交换的矩阵作成$M_n(\mathbf{F})$的一个子空间，其中A是$M_n(\mathbf{F})$中的一个固定矩阵。

10　设V_1与V_2分别是齐次线性方程组$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$与$x_1=x_2=\cdots=x_n$的解空间，证明$\mathbf{F}^n=V_1\oplus V_2$。

第七章 线性变换

§1 概括说明

线性空间是某一类事物从量的方面的一个抽象．研究线性空间，不仅要研究线性空间的总体结构，线性空间之间的联系，而且更为重要的是，研究线性空间的向量之间的各种各样的联系，这种联系就反映为线性空间的变换．线性变换是一种最简单的同时又是一种最基本的变换，它是解析几何中的坐标变换、数学分析中的某些变量替换以及别的数学分支中某些类似的变换的抽象、概括及推广，它在理论上和应用上都是十分重要的．

线性变换是线性代数学的一个主要研究对象，是线性代数学的重要内容，就一定意义上说，处于中心的地位．线性变换的理论，在代数学自身、数学的其它分支、其它自然科学、工程技术领域、经济学及社会科学领域，均有重要的广泛的应用．

我们主要研究有限维线性空间的线性变换．n维线性空间的线性变换与n阶矩阵不仅有密切的关系，而且就一定意义上可以说，二者是等同的．本章的中心问题就是线性变换及其矩阵表示．线性变换与矩阵的对应与转化，则是本章研究问题的基本方法，也是本章的特色．从而，就使我们进一步看到，矩阵不仅是线性代数学的工具，也是线性代数学的主要研究对象，线性代数学又称为“矩阵论”．

本章的内容分为四个部分：线性变换及其运算，线性变换与矩阵，相似矩阵、特征值与特征向量，线性变换的矩阵的化简．

线性空间V的线性变换σ是V的保持线性运算的变换．对于线性变换这种新的研究对象，要定义其加法、数乘、乘法等运算，还要研究线性变换的值域与核．

线性变换是很抽象的概念，为了进行研究，就要设法具体地表现出来。决定一个线性变换就是要决定每一个向量在其下的象，对于n维线性空间而言，由一组基的象完全决定，对一组基的象进行数量刻划，即把一组基的象用该组基线性表出，就可以得到一个n阶矩阵，称为线性变换在该组基下的矩阵。

研究线性变换在不同基下的矩阵间的关系，引入了矩阵相似的概念。矩阵的相似与矩阵的等价、合同比起来，更为重要。

线性变换用矩阵表示，自然地，矩阵越简单，刻划线性变换越方便。最简单的矩阵莫过于对角形的矩阵，在对角形矩阵的情况下，基向量ε在线性变换σ之下变为$\lambda\varepsilon$，$\sigma(\varepsilon)=\lambda\varepsilon$，即乘一个数，这就引入了特征值与特征向量的概念。目前，这些概念已广泛应用于数学的其它分支，如微分方程、积分方程和泛函分析中，应用于振动理论、理论物理和量子力学中，应用于经济学和其它社会科学中。特征值与特征向量的概念也可以由下面的渠道引入：1）数乘变换，2）一维不变子空间。总之，正是从这种简单化$\sigma(\varepsilon)=\lambda\varepsilon$的考虑，引入了如此重要且内容如此丰富的特征值与特征向量的概念。特征值的最简单的应用，是解析几何中化二次曲面的方程为标准形。

线性变换的矩阵的化简，不仅是本章的中心，而且是线性代数学的其它部分，如λ-矩阵、欧氏空间等的研究中心。本章解决了相似对角化的问题，对于准对角形的情况给出了必要充分条件，对于若当标准形作了介绍。

本章的补充资料是：线性映射，根子空间，极小多项式，商空间的诱导变换，二阶三阶矩阵的若当形，幂零矩阵的标准形式，特征值的计算与估计，历史资料点滴。

§2 内容提要

Ⅰ 线性变换及其运算

一　定义与性质

设V是数域F上的线性空间，σ是V的变换．若对于V中的任意向量α，β，F中的任意数k，均成立：1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$，2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$，则称$\sigma$是线性空间V的一个线性变换（常称$\sigma$保持线性运算）．

下面是几个重要的线性变换：

1) 零变换T_0：$T_0(\alpha)=0$，$\forall\alpha\in V$；

2) 单位变换（恒等变换）T_e：$T_e(\alpha)=\alpha$，$\forall\alpha\in V$；

3) 由数$k\in F$决定的数乘（相似、位似）变换T_k：

$$T_k(\alpha)=k\alpha,\ \forall\alpha\in V;$$

4) 射影变换$T_{P(W)}$：$V=W\oplus U$，$\alpha\in V$，有唯一的分解式$\alpha=\beta+\gamma$，$\beta\in W$，$\gamma\in U$，$T_{P(W)}(\alpha)=\beta$．

线性变换σ具有性质：1) $\sigma(0)=0$；2) $\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$；3) σ保持线性组合不变；4) 若α_1，α_2，…，α_s线性相关，则$\sigma(\alpha_1)$，$\sigma(\alpha_2)$，…，$\sigma(\alpha_s)$线性相关，但反之不然；5) 若W是V的子空间，则$\sigma(W)=\{\sigma(\alpha)|\alpha\in W\}$与$\sigma^{-1}(W)=\{\beta|\beta\in V$且$\sigma(\beta)\in W\}$都是V的子空间．

设V是数域F上的线性空间，σ是V的变换，则σ是线性变换$\Leftrightarrow$对于V中的任意向量α，β与F中的任意数k，l，均成立$\sigma(k\alpha+l\beta)=k\sigma(\alpha)+l\sigma(\beta)$．

设σ是n维线性空间V的线性变换，则σ由其对于V的一组基的作用完全确定．即，若ε_1，ε_2，…，ε_n是V的一组基，σ、τ是V的两个线性变换，且$\sigma(\varepsilon_i)=\tau(\varepsilon_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，则$\sigma(\alpha)=\tau(\alpha)$对于V中任意向量$\alpha$均成立，就是说$\sigma=\tau$．

设V是数域F上的n维线性空间，ε_1，ε_2，…，ε_n是V的一组基，α_1，α_2，…，α_n是V的任意n个向量，则存在V的唯一的线性变换σ，使得$\sigma(\varepsilon_i)=\alpha_i$，$i=1,2,\cdots,n$．

二　运算

1　加法

定义．若σ，τ是线性空间 V 的变换，则

1）$\sigma+\tau$：$(\sigma+\tau)(\alpha)=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha)$，$\forall\alpha\in V$，称为$\sigma$与$\tau$的和；

2）$-\sigma$：$(-\sigma)(\alpha)=-\sigma(\alpha)$，$\forall\alpha\in V$，称为$\sigma$的负变换；

3）$\sigma-\tau=\sigma+(-\tau)$，称为$\sigma$与$\tau$的差．

性质．对于V 中的任意变换σ，τ，ψ，均成立：

1）$\sigma+\tau=\tau+\sigma$；　　2）$(\sigma+\tau)+\psi=\sigma+(\tau+\psi)$；

3）$\sigma+(-\sigma)=T_0$；　　4）$\sigma+T_0=\sigma$．

定理．若σ，τ是V 的线性变换，则$\sigma+\tau$也是V的线性变换，$-\sigma$，$\sigma-\tau$同样也是V的线性变换．从而，线性变换的加法具有性质1)—4)．

2　数量乘法

定义．若σ是线性空间V的变换，k是**F**中的数，则　$k\sigma$：$(k\sigma)(\alpha)=k\sigma(\alpha)$，$\forall\alpha\in V$，　称为$k$与$\sigma$的数量乘积．

性质．对于V的任意变换σ，τ，**F**中的任意数k,l，均成立：

5）$(k+l)\sigma=k\sigma+l\sigma$；　　6）$k(\sigma+\tau)=k\sigma+k\tau$；

7）$k(l\sigma)=(kl)\sigma$；　　8）$1\sigma=\sigma$．

定理．若σ是V的线性变换，k是**F**中的数，则$k\sigma$也是V 的线性变换．从而，线性变换的数量乘法具有性质5)—8)．

3　乘法

定义．若σ，τ是线性空间V的变换，则　$\tau\sigma$：$(\tau\sigma)(\alpha)=\tau(\sigma(\alpha))$，$\forall\alpha\in V$，　称为$\sigma$与$\tau$的乘积．

性质．对于V的任意变换σ，τ，ψ，**F**中的任意数k，有

9）$(\sigma\tau)\psi=\sigma(\tau\psi)$；　　10）$T_e\sigma=\sigma T_e=\sigma$；

11）$T_0\sigma=\sigma T_0=T_0$；　　12）$k(\sigma\tau)=(k\sigma)\tau=\sigma(k\tau)$；

13）$(\tau+\psi)\sigma=\tau\sigma+\psi\sigma$；　　14）$\sigma\tau\neq\tau\sigma$；

15）$\sigma\tau=T_0$不能推出$\sigma=T_0$ 或 $\tau=T_0$；

16) $\sigma\tau=\sigma\psi,\sigma\neq T_0$不能推出$\tau=\psi$.

定理．若σ，τ是V的线性变换，则$\tau\sigma$是V的线性变换．从而，线性变换的乘法具有性质9)—16)．此外，还具有性质：

13′) $\sigma(\tau+\psi)=\sigma\tau+\sigma\psi$.

4　逆变换

定义．设σ是线性空间V的变换．若存在V的变换τ，使得$\sigma\tau=\tau\sigma=T_e$，则称$\sigma$是V的可逆变换，称$\tau$是$\sigma$的一个逆变换．

性质．17）若σ是V的可逆变换，则σ的逆变换唯一，记作σ^{-1}，从而$\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=T_e$；

18）σ是V的可逆变换$\Leftrightarrow\sigma$是V到V的双射；τ是σ的一个逆变换$\Leftrightarrow$任意$\beta\in V$，当$\sigma(\alpha)=\beta$时，有$\tau(\beta)=\alpha$.

定理．若σ是V的线性变换，且σ是可逆变换，则σ的逆变换也是线性变换．从而，可逆线性变换具有性质17)与18)．此外，还具有性质19)与20)：

19）σ是V的一个可逆线性变换$\Leftrightarrow\sigma$是V到自身的一个同构映射；若ε_1，ε_2，…，ε_n是n维线性空间V的一组基，σ是V的线性变换，则σ是可逆的$\Leftrightarrow\sigma(\varepsilon_1)$，$\sigma(\varepsilon_2)$，…，$\sigma(\varepsilon_n)$线性无关．

20）若σ是有限维线性空间V的线性变换，则σ将V中线性无关的向量组变为线性无关的向量组$\Leftrightarrow\sigma$是可逆的．

5　方幂

定义．设n是正整数，σ是线性空间V的变换，则n个σ的积$\sigma\sigma\cdots\sigma$称为σ的n次幂，记作σ^n．又，$\sigma^0=T_e$．当σ是可逆变换时，$\sigma^{-n}=(\sigma^{-1})^n$.

性质．21）$\sigma^m\sigma^n=\sigma^{m+n}$；

22）$(\sigma^m)^n=\sigma^{mn}$；　23）$(\sigma\tau)^n\neq\sigma^n\tau^n$.

当σ，τ为V的任意变换时，m，n为非负整数；当σ，τ为可逆变换时，m，n为任意整数．

定理．若σ是V的线性变换，则σ的方幂也是V的线性变换，

从而，线性变换的方幂具有性质21)—23)。

6 多项式

定义。设 $f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0\in\mathbf{F}[x]$，$\sigma$是线性空间V的变换，则 $f(\sigma)=a_m\sigma^m+a_{m-1}\sigma^{m-1}+\cdots+a_1\sigma+a_0 T_e$是V的一个变换，称为变换$\sigma$的多项式。

性质。 24) 设$f(x)$，$g(x)$，$h(x)\in\mathbf{F}[x]$，σ是V的变换。若$h(x)=f(x)+g(x)$，则$h(\sigma)=f(\sigma)+g(\sigma)$。

定理．线性变换的多项式是线性变换。从而，具有性质24)．此外，还具有性质： 24′) 设$f(x)$，$g(x)$，$l(x)\in\mathbf{F}[x]$，σ是V的线性变换。若$l(x)=f(x)g(x)$，则$l(\sigma)=f(\sigma)g(\sigma)$。特别地，$f(\sigma)g(\sigma)=g(\sigma)f(\sigma)$。

线性变换之间的一些关系，可以通过线性变换的运算表示出来。

三 T(V(**F**))与LT(V(**F**))

定义．设V是数域**F**上的线性空间，则V的全体变换的集合记为T(V(**F**))，V的全体线性变换的集合记为LT(V(**F**))。当V是数域**F**上的n维线性空间时，V的全体线性变换的集合记为LT(V(**F**,n))。

定理．若V是数域**F**上的线性空间，则T(V(**F**))对于变换的加法与数量乘法作成**F**上的线性空间，LT(V(**F**))亦然。

定理．若V是数域**F**上的n维线性空间，ε_1，ε_2，…，ε_n是V的一组基，则

1) LT(V(**F**,n))对于加法与数量乘法作成**F**上的n^2维线性空间；

2) $\sigma_{ij}(\varepsilon_k)=\begin{cases}\varepsilon_j, & k=i\\ 0, & k\neq i\end{cases}$，$k=1,2,\cdots,n,(i,j=1,2,\cdots,n)$

是线性空间LT(V(**F**,n))的一组基。

四 值域与核

定义．设σ是线性空间V的线性变换，则$\sigma(V)$称为σ的 值域（象），$\sigma^{-1}(0)=\{\alpha|\alpha\in V且\sigma(\alpha)=0\}$称为$\sigma$的核(朒)。

定理．若σ是线性空间V的线性变换，则

1）$\sigma(V)$与$\sigma^{-1}(0)$均为V的子空间；

2）若$\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots,\varepsilon_n$是V的一组基，则$\sigma(V)=L(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))$，从而，$dim(\sigma(V))$等于向量组$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$的秩．

定义．若σ是有限维线性空间V的线性变换，则$dim(\sigma(V))$称为σ的秩，$dim(\sigma^{-1}(0))$称为σ的零度．

定理．若σ是有限维线性空间V的线性变换，则，1)σ的秩＋σ的零度$=dim V$；2)σ是双射$\Leftrightarrow\sigma$是单射$\Leftrightarrow\sigma$是满射．

Ⅱ　线性变换与矩阵

设V是数域F上的n维线性空间，ε_1，ε_2，…，ε_n是V的一组基，σ是V的线性变换．若基向量的象表示为

$$\begin{cases}\sigma(\varepsilon_1)=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n\\ \sigma(\varepsilon_2)=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{n2}\varepsilon_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma(\varepsilon_n)=a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n\end{cases},$$

用矩阵表示为

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

则称A是σ在基ε_1，ε_2，…，ε_n下的矩阵．

对于线性空间V的任意一组基ε_1，ε_2，…，ε_n，V的任一线性变换σ在ε_1，ε_2，…，ε_n下的矩阵A存在且唯一，并且σ的秩等于A的秩．不同的线性变换在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵也不同．

若任意选定线性空间V的一组基ε_1，ε_2，…，ε_n，则对于任一给定的$A\in M_n(\mathbf{F})$，相应存在唯一的$\sigma\in LT(V(\mathbf{F},n))$，使得$\sigma$在$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$，…，$\varepsilon_n$下的矩阵为A.

设V是数域**F**上的n维线性空间，则存在$LT(V(\mathbf{F},n))$到$M_n(\mathbf{F})$的双射，且保持运算（加法、数乘、乘法、逆变换等）. 具体地，作$\Phi: LT(V(\mathbf{F},n))\to M_n(\mathbf{F})$，取定V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，对于$\sigma\in LT(V(\mathbf{F},n))$，$\Phi(\sigma)=A$，其中A是$\sigma$在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵，则$\Phi$是双射. 并且，又设$\tau\in LT(V(\mathbf{F},n))$，$\Phi(\tau)=B$，有1) $\Phi(T_0)=0$；2) $\Phi(T_e)=E$；3) $\Phi(T_k)=kE$；4) $\Phi(\sigma+\tau)=A+B$；5) $\Phi(\sigma\tau)=AB$；6) $\Phi(k\sigma)=kA$；7) σ可逆$\Leftrightarrow$A可逆，且$\Phi(\sigma^{-1})=A^{-1}$. 而从，Φ是线性空间$LT(V(\mathbf{F},n))$到线性空间$M_n(\mathbf{F})$的同构映射，从而$LT(V(\mathbf{F},n))\overset{\Phi}{\cong}M_n(\mathbf{F})$.

设V的线性变换σ在V的基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵是A，$\alpha\in V$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标是$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则$\sigma(\alpha)$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$按公式$(y_1,y_2,\cdots,y_n)'=A(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$计算. 从而，$\sigma(\alpha)$表示为

$$\sigma(\alpha)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A(x_1,x_2,\cdots,x_n)'.$$

若线性变换σ在V的两组基ε_1，ε_2，…，ε_n与η_1，η_2，…，η_n下的矩阵分别是A与B，且ε_1，ε_2，…，ε_n到η_1，η_2，…，η_n的过渡矩阵是X，则$B=X^{-1}AX$. 反之，若有$B=X^{-1}AX$，则A与B分别为V的同一线性变换σ在V的两组基下的矩阵，而X是由其中一组基到另一组基的过渡矩阵.

Ⅱ 矩阵相似、特征值与特征向量

一 矩阵相似

设A，$B\in M_n(\mathbf{F})$. 若有可逆矩阵$X\in M_n(\mathbf{F})$，使得$B=X^{-1}AX$，则称A相似于B，记作$A\sim B$.

矩阵相似具有下列性质：1) 矩阵相似具有反身性、对称性、传递性；2) 若$B_1=X^{-1}A_1X$，$B_2=X^{-1}A_2X$，则B_1+B_2

$=X^{-1}(A_1+A_2)X, B_1B_2=X^{-1}(A_1A_2)X$；3) 若$B=X^{-1}AX$，则$B^m=X^{-1}A^mX$，$f(B)=X^{-1}f(A)X$；4)若$A\sim B$，则秩(A)=秩(B)；5)若$A\sim B$,则$|A|=|B|$。

应用矩阵相似的概念，第Ⅱ部分中最后的结论可以表述为：同一线性变换在不同基下的矩阵是相似的；反过来，若两个矩阵相似，则它们可以看作同一线性变换在两组基下的矩阵。

二　矩阵的特征多项式

设有数域F上的n阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

λ是一个文字，则

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为A的特征矩阵，行列式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为A的特征多项式，记作$f_A(\lambda)$。

n阶矩阵A的主对角线上元素之和称为A的迹或追迹，记作$T_r(A)$。

n阶矩阵A的特征多项式$f_A(\lambda)$是数域F上的n次多项式，且$f_A(\lambda)=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$，$\lambda^{n-1}$的系数是$-T_r(A)$，常数项是$(-1)^n|A|$。

对于任意n阶矩阵A，A与A'有相同的特征多项式，即$f_A(\lambda)=f_{A'}(\lambda)$. 对于任意$n$阶矩阵A与B，AB与BA有相同的特征多项式，即$f_{AB}(\lambda)=f_{BA}(\lambda)$。相似矩阵有相同的特征多项式、相同的迹.

哈密尔顿-凯莱定理. 若$f_A(\lambda)$是n阶矩阵A的特征多项式，则 $f_A(A)=0$。

三　矩阵的特征值与特征向量

设$A\in M_n(F)$。若对于 $\lambda_0\in F$，存在 $\xi\in F^n$，$\xi\neq 0$，使得$A\xi=\lambda_0\xi$，则称λ_0是A的一个特征值，称ξ是A的属于特征值λ_0的特征向量.

若ξ是A的属于特征值λ_0的特征向量，则对于任意的$k\in F$，$k\neq 0$，$k\xi$也是A的属于特征值λ_0的特征向量，从而，一个特征值有无穷多个特征向量，特征向量不是被特征值唯一决定的。但是，一个特征向量只能属于一个特征值，从而，特征值被特征向量唯一确定。

λ_0是A的特征值，ξ是A的属于λ_0的特征向量$\Leftrightarrow\lambda_0$是A的特征多项式$f_A(\lambda)$在F中的根，ξ是齐次线性方程组$(\lambda_0E-A)X=0$的非零解。

若n阶矩阵A在F中有n个特征值（重特征值按重数计算），则A的所有特征值的和等于A的迹，所有特征值的积等于A的行列式$|A|$。

关于n阶矩阵的特征值，有下列结论：1)A与A'有相同的特征值；2)AB与BA有相同的特征值；3) 0是A的特征值$\Leftrightarrow|A|=0$；4)零矩阵有n重特征值0；5)单位矩阵有n重特征值1；6)数量矩阵kE有n重特征值k；7)幂零矩阵有n重特征值0；8)幂等矩阵$(A^2=A)$的特征值只可能是0或1；9) 对合矩阵$(A^2=E)$的特征值只可能是1或-1；10) 幺幂矩阵$(A^k=E)$的特征值只可能

是1的k次方根；11）设$g(x)$是数域F上的任意多项式，A的特征值是λ_1，λ_2，…，λ_n，则$g(A)$的特征值是$g(\lambda_1)$，$g(\lambda_2)$，…，$g(\lambda_n)$；12）若λ_0是可逆矩阵A的一个特征值，则$\lambda_0\neq 0$，且λ_0^{-1}是A^{-1}的一个特征值．

四　矩阵相似于对角形

若$A\sim[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$，则$\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_n$是A的所有特征值（重特征值按重数计算）．$n$阶矩阵A相似于对角形矩阵$\Leftrightarrow$A有$n$个线性无关的特征向量．

Ⅳ　线性变换的矩阵的化简

一　不变子空间

设V是数域F上的线性空间，σ是V的线性变换，W是V的子空间．若$\sigma(W)\subseteq W$，即，对于W中的任意向量α，有$\sigma(\alpha)\in W$，则称W是σ的不变子空间，简称σ-子空间．

关于不变子空间，有下列结论：1）V及$\{0\}$是任意线性变换σ的不变子空间；2）$\sigma(V)$与$\sigma^{-1}(0)$均是σ-子空间；3）V的任一子空间W都是数乘变换T_k的不变子空间；4）σ的有限（无限）个不变子空间的交是σ的不变子空间；5）σ的有限个不变子空间的和是σ的不变子空间；6）若W是σ-子空间，则$\sigma(W)$与$\sigma^{-1}(W)$都是σ-子空间；7）若$\sigma\tau=\tau\sigma$，则$\sigma(V)$与$\sigma^{-1}(0)$是τ-子空间，$\tau(V)$与$\tau^{-1}(0)$是σ-子空间；8）$f(\sigma)(V)$与$(f(\sigma))^{-1}(0)$是σ-子空间；9）设W是有限维线性空间V的子空间，σ是V的可逆线性变换，W是σ-子空间，则W是σ^{-1}的不变子空间；10）若$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，则W是$\sigma$-子空间$\Leftrightarrow\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_s)\in W$；11）设$\sigma$是数域F上的线性空间V的线性变换，则V有一维$\sigma$-子空间$\Leftrightarrow$存在$\lambda_0\in F$，及$\xi\in V$，$\xi\neq 0$，使得$\sigma(\xi)=\lambda_0\xi$．

若W是σ-子空间，则

$$\sigma|W:\ (\sigma|W)(\alpha)=\sigma(\alpha),\ \forall\alpha\in W,$$

是W的一个线性变换．称$\sigma|W$是σ在W上引起的变换，或称将σ

限制在W上。例如，$\sigma|\sigma^{-1}(0)=T_0$。

σ与$\sigma|W$的区别在于：σ作用于V上，而$\sigma|W$仅作用于W上，对于$\beta\in V$但$\beta\notin W$，$(\sigma|W)(\beta)$是无意义的。

对于线性变换的矩阵的化简而言，不变子空间的作用，体现于下面的三条结论：

1）设σ是n维线性空间V的线性变换，则存在非平凡的σ-子空间 W$\Leftrightarrow\sigma$在V的一组基下的矩阵有形状$\begin{pmatrix}A_1 & A_3\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$，此时，$\sigma|W$在W的某组基下的矩阵就是$A_1$。

2）设σ是n维线性空间V的线性变换，则存在非平凡的σ-子空间W_1，W_2，…，W_s且$V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s\Leftrightarrow\sigma$在V的一组基下的矩阵是准对角形$[A_1,A_2,\cdots,A_s]$。此时，$\sigma|W_i$在$W_i$的某组基下的矩阵就是$A_i$，$i=1,2,\cdots,s$。

3）设σ是n维线性空间V的线性变换，则V是n个一维σ-子空间的直和$\Leftrightarrow\sigma$在V的一组基下的矩阵是对角形。

二　特征值与特征向量

1　特征多项式

设V是数域**F**上的n维线性空间，σ是V的线性变换。若σ在V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵是A，则A的特征多项式就称为$\sigma$的特征多项式，记作$f_\sigma(\lambda)$，$|A|$就称$\sigma$的行列式。

σ的特征多项式、行列式均与基的选取无关，均是由σ自身唯一决定的。

哈密尔顿-凯莱定理。设σ是n维线性空间V的线性变换。若$f_\sigma(\lambda)$是σ的特征多项式，则$f_\sigma(\sigma)=T_0$。

2　特征值与特征向量

设V是数域**F**上的线性空间，σ是V的线性变换。若对于**F**中的数λ_0，存在非零向量$\xi\in V$，使得$\sigma(\xi)=\lambda_0\xi$，则称λ_0是σ的一个特征值，称ξ是σ的属于特征值λ_0的特征向量。

特征值与特征向量有如下性质：1）若ξ是σ的属于λ_0的特征向量，则对于F中任意非零数k，$k\xi$也是σ的属于特征值λ_0的特征向量．从而，属于同一个特征值的特征向量有无穷多个，特征向量不是由特征值唯一决定的．2）若$\lambda_0, \mu_0 \in$ F，$\lambda_0 \neq \mu_0$，则$\xi \in V$，$\xi \neq 0$，不能既是σ的属于特征值λ_0的特征向量，又是σ的属于特征值μ_0的特征向量．从而，一个特征向量只能属于一个特征值，特征值被特征向量唯一决定．3）设$g(x)$是数域F上的任意多项式．若ξ是σ的属于λ_0的特征向量，则ξ也是$g(\sigma)$的属于$g(\lambda_0)$的特征向量．4）若σ是可逆线性变换，则0不是σ的特征值．5）零变换T_0的特征值是且只能是0，且任一非零向量均是T_0的属于特征值0的特征向量．6）单位变换T_e的特征值是且只能是1，且任一非零向量均是T_e的属于特征值1的特征向量．7）数乘变换T_k的特征值是且只能是k，且任一非零向量均是T_k的属于特征值k的特征向量．8）若λ_0是可逆线性变换σ的一个特征值，则$\lambda_0 \neq 0$，且λ_0^{-1}是σ^{-1}的一个特征值．

对于数域F上的线性空间V的线性变换σ而言，σ的特征值与特征向量，是十分抽象的，一般难于直接求出．但是，对于n维线性空间V的线性变换而言，却可以与n阶矩阵联系起来，从而，使问题变得具体且可以解决．

设V是数域F上的n维线性空间，ε_1，ε_2，…，ε_n是V的一组基，σ是V的线性变换．若σ在基ε_1，ε_2，…，ε_n下的矩阵是A，$\lambda_0 \in$ F，$\xi \in V$，$\xi \neq 0$，则：

1）λ_0是σ的特征值$\Leftrightarrow \lambda_0$是A的特征值，即，$\lambda_0$是特征多项式$|\lambda E - A|$在数域F中的一个根；

2）$\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i \varepsilon_i$是$\sigma$的属于特征值$\lambda_0$的特征向量$\Leftrightarrow$ $(k_1, k_1, \cdots, k_n)'$是齐次线性方程组$(\lambda_0 E - A)X = 0$的非零解；

3）若$(\lambda_0 E - A)X = 0$的一个基础解系是η_1，η_2，…，

η_{n-r}，r为矩阵$\lambda_0 E-A$的秩，而$\eta_t=(a_{1t}, a_{2t}, \cdots, a_{nt})'$，则 $\xi_t=\sum_{i=1}^{n} a_{it}\varepsilon_i (t=1,2,\cdots,n-r)$是$\sigma$的属于特征值$\lambda_0$的$n-r$个（最大个数）线性无关的特征向量，且$\sigma$的属于特征值$\lambda_0$的任一特征向量$\xi$为 $\xi=\sum_{i=1}^{n-r} l_i\xi_i$，其中$l_1$，$l_2$，…，$l_{n-r}$是**F**中的任一组不全为零的数；

4）ξ_1，ξ_2，…，ξ_s是σ的特征向量$\Leftrightarrow\xi_1$，ξ_2，…，ξ_s在ε_1，ε_2，…，ε_n下的坐标$[\xi_1]$，$[\xi_1]$，…，$[\xi_s]$是A的特征向量，而且ξ_1，ξ_2，…，ξ_s线性无关$\Leftrightarrow[\xi_1]$，$[\xi_2]$，…，$[\xi_s]$线性无关。

求线性变换σ的所有特征值与特征向量，可以按下列步骤进行：1）选定V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，求$\sigma$在该组基下的矩阵A；2）计算特征多项式$f_\sigma(\lambda)=|\lambda E-A|$，并求$f_\sigma(\lambda)$在数域**F**中的根$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$；3）对于每个$\lambda_i$，求齐次线性方程组$(\lambda_i E-A)X=0$的一个基础解系$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{r_i}$，$\eta_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})'$，$\eta_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})'$，…，$\eta_{r_i}=(a_{r_i1}, a_{r_i2}, \cdots, a_{r_in})'$，则$\xi_1=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\varepsilon_j$，$\xi_2=\sum_{j=1}^{n} a_{2j}\varepsilon_j$，…，$\xi_{r_i}=\sum_{j=1}^{n} a_{r_ij}\varepsilon_j$就是$\sigma$的属于$\lambda_i$的$r_i$个(最大个数)线性无关的特征向量，其中$r_i=n-$秩$(\lambda_i E-A)$，$\sigma$的属于$\lambda_i$的所有特征向量是$\sum_{u=1}^{r_i} l_u\xi_u$，其中$l_1$，$l_2$,…，$l_{r_i}$是**F**中的一组不全为零的数。

3　特征子空间

设V是数域**F**上的线性空间，σ是V的线性变换，则对于**F**中的数λ_0，$V_{\lambda_0}=\{\alpha|\alpha\in V且\sigma(\alpha)=\lambda_0\alpha\}$是V的子空间。

当λ_0是σ的特征值时，称V_{λ_0}是σ的属于特征值λ_0的特征子

空间．此时，V_{λ_0}由σ的属于λ_0的一切特征向量及零向量组成．而当λ_0不是σ的特征值时，$V_{\lambda_0}=\{0\}$．

对于n维线性空间V的线性变换σ而言，特征子空间V_{λ_0}的维数等于$n-$秩(λ_0E-A)，其中A是σ在一组基下的矩阵，即，V_{λ_0}的维数等于属于λ_0的线性无关的特征向量的最大个数．

σ的特征子空间是σ的不变子空间，且$\sigma|V_{\lambda_0}=T_{\lambda_0}$．

关于线性无关的特征向量，有下列两个结论：

1）属于不同特征值的特征向量线性无关．

2）若λ_1，λ_2，…，λ_k是线性变换σ的互不相同的特征值，而α_{i1}，α_{i2}，…，α_{ir_i}是属于λ_i的线性无关的特征向量，$i=1$，2，…，k，则向量组α_{11}，…，α_{1r_1}，…，α_{k1}，…，σ_{kr_k}也线性无关．

于是，我们得到：若λ_1，λ_2，…，λ_k是σ的互不相同的特征值，则特征子空间的和$V_{\lambda_1}+V_{\lambda_2}+\cdots+V_{\lambda_k}$是直和．

对于有限维线性空间而言，线性变换σ的特征子空间V_{λ_0}的维数不能大于λ_0作为$f_\sigma(\lambda)$在**F**中的根的重数．

4　V按特征值分解为不变子空间的直和

一般来讲，V不能分解为特征子空间的直和，但却可以作如下的分解：设V是数域**F**上的n维线性空间，σ是V的线性变换．若σ的特征多项式在**F**上可分解为

$$f_\sigma(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

λ_1，λ_2，…，λ_s互不相同，则V可分解为σ的不变子空间的直和$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$，其中

$$V_i=\{\xi|\xi\in V，且(\sigma-\lambda_iT_e)^{r_i}(\xi)=0\}.$$

三　对角形

设σ是数域**F**上的n维线性空间V的线性变换．下面给出σ在V的一组基下的矩阵是对角形的条件．

若σ在一组基下的矩阵是对角形，则σ有n个特征值（重特征

值按重数计算），而且，矩阵的主对角线上的数就是σ的全部特征值。

σ在一组基下的矩阵是对角形$\Leftrightarrow\sigma$有n个线性无关的特征向量$\Leftrightarrow$V可以分解为n个一维σ-子空间的直和。

若σ的特征多项式的全部互不相同的根λ_1，$\lambda_2,\cdots,\lambda_s$都属于F，则$\sigma$在一组基下的矩阵是对角形$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{s}dim(V_{\lambda_i})=n\Leftrightarrow$V是$\sigma$的全部特征子空间的直和$\Leftrightarrow dim(V_{\lambda_i})=\lambda_i$的重数，$i=1,2,\cdots,s\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{s}$秩$(\lambda_i E-A)=n(s-1)$。

若σ的特征多项式$f_\sigma(\lambda)$在F中有n个互不相同的根，则必有V的一组基，σ在该组基下的矩阵是对角形。

若σ在某组基下的矩阵是对角形，则可以按如下方法求出该组基及对角形：1)取定V的一组基ε_1，ε_2，$\cdots,\varepsilon_n$，求出σ在ε_1，ε_2，$\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵A；2)求出A的特征多项式的n个根λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n，再求属于λ_1，λ_2，$\cdots,\lambda_n$的A的n个线性无关的特征向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$；3)分别以$\alpha_1,\alpha_2$，$\cdots,\alpha_n$为列作矩阵$X=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，求得V的另一组基$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X$；4)$\sigma$在基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$下的矩阵是$[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$，$\eta_i$是属于$\lambda$的$\sigma$的特征向量。

四　若当形

设λ_0是复数，则形式为

$$J(\lambda_0,t)=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\\ 1 & \lambda_0\cdots 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0\cdots 1 & \lambda_0 & 0\\ 0 & 0\cdots 0 & 1 & \lambda_0\end{pmatrix}_t$$

的t阶矩阵称为若当块。

设V是复数域C上的n维线性空间，σ是V的线性变换，则σ在

V的某一组基下的矩阵是由若干个若当块组成的准对角形矩阵，称为若当形矩阵，并且，除去若当块的排列次序外，该若当形矩阵由σ唯一决定，称为σ的若当标准形。

若当标准形的理论推导及具体求法，将在下一章中解决。但是，基的确定较为复杂，需经专门的计算。

在线性变换σ的若当标准形中，主对角线上的元素是σ的特征多项式$f_\sigma(\lambda)$的全部根（重根按重数计算）。

§3 重点难点

本章的主题词是： 线性变换，零变换，单位变换（恒等变换），数乘（相似、位似）变换，射影变换，线性变换的和，线性变换的积，线性变换的多项式，线性变换的值域（象），线性变换的核（腑），线性变换的秩，线性变换的零度；线性变换的矩阵；矩阵相似，特征矩阵，矩阵的特征多项式，矩阵的特征值，矩阵的特征向量，矩阵的迹（追迹），哈密尔顿-凯莱定理；不变子空间，线性变换在子空间上的限制，线性变换的特征多项式，线性变换的行列式，线性变换的特征值，线性变换的特征向量，特征子空间，可对角化，若当块，若当标准形。

本章的基本方法是： 线性变换的判定方法，线性变换的值域的求法，线性变换的核的求法，线性变换的矩阵的求法，换基求矩阵法，矩阵相似的判定方法，不变子空间的判定方法，特征多项式的求法，特征值与特征向量求法，对角化方法。

本章的重点是： 线性变换的矩阵与矩阵相似，特征值与特征向量，线性变换的矩阵可以对角化的条件与方法。

线性变换在一组基下的矩阵，或简单地说，线性变换的矩阵，直接贯穿于全章的大部分内容中，而且线性变换的矩阵的化简，是我们追求的目标与研究的中心。线性变换的矩阵给n维线性空间的线性变换以具体的刻划，使线性变换的运算转化为矩阵

的运算，反之，在必要时，也把矩阵的问题转化为线性变换来处理，二者是同一事物的两种表现形式，具有完全 相 同的 代数性质。由n维线性空间的线性变换在不同基下的矩阵的关系的问题，引入了矩阵相似的概念，研究矩阵相似是线性代数的一个基本内容，比矩阵等价与矩阵合同更为重要。因此，线性变换的矩阵与矩阵相似，成为本章的一个重点。

特征值与特征向量，是基本的概念与基本的工具，不仅本章中用到，以后还要用，因此，成为本章的一个重点。特征值与特征向量的求法，不仅要掌握，而且要熟练，计算要迅速、准确。特征值与特征向量的各种结论，是研究矩阵化简的理论基础，也必须理解，并能够应用。另外，还要从不同角度认识此概念引入的必要性与合理性。

线性变换的矩阵的化简，是本章的中心，但是，本章仅彻底解决了可以对角化的问题。因此，线性变换的矩阵可以对角化的条件与方法，成为本章的一个重点。要理解并掌握线性变换的矩阵可以对角化的必要条件、必要充分条件和充分条件，对于几个必要充分条件，要认识它们本质上的一致性。另外，还要会具体地求出对角形以及基的过渡矩阵，即掌握对角化的方法。

本章的难点是：特征值与特征向量，不变子空间，哈密尔顿-凯莱定理及其应用。

特征值与特征向量，既是本章的一个重点，又是本章的一个难点，原因在于：1）概念本身较抽象；2）不容易讲清引入的背景；3）计算较复杂，不仅量大，而且所用的知识多；4）关于不同特征值的特征向量线性无关的结论，证明也较复杂。解决困难的方法是：1）如§1中所讲过的，要从不同的侧面理解引入概念的必要性与合理性；2）用解析几何的事实作解释，若线性变换σ把非零向量ξ变为与ξ共线的向量$\lambda_0\xi$，则ξ就是σ的属于特征 值λ_0的特征向量；3）用一些较简单的例子来熟悉与理解概念，例如，

利用由数k决定的数乘变换T_k的属于特征值k的特征向量是线性空间中的任一非零向量这一具体模型；4）复习多项式、行列式、齐次线性方程组、向量的坐标等有关内容，为计算打好基础；5）线性变换σ在基ε_1，ε_2，…，ε_n下的矩阵是A，弄清σ与A的特征多项式、特征值与特征向量的关系；6）提出一些简单的思考讨论题。

不变子空间是本章的一个难点，原因在于：1）关于不变子空间的定义的引入，不容易说明，往往使人感到突然；2）σ限制在其不变子空间W上，得到$\sigma|W$，对于$\sigma|W$与σ的联系与区别，不容易理解；3）不变子空间又往往与一些较困难的概念，如直和、特征值与特征向量等，联系在一起。解决困难的方法是：1）通过例子，如线性变换的值域与核，理解不变子空间的定义以及$\sigma|W$等；2）通过后面研究线性变换的矩阵的化简，反过来认识不变子空间的意义；3）复习线性变换的矩阵、直和等概念，为理解不变子空间概念作准备。

哈密尔顿-凯莱定理及其应用是本章的一个难点，原因在于：1）哈密尔顿-凯莱定理的内容不易理解，并容易发生误解：因为$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|$，所以$f_A(A)=|AE-A|=0$；2）哈密尔顿-凯莱定理的证明篇幅较长，而且用到伴随矩阵、矩阵多项式等概念，不容易掌握；3）应用该定理将线性空间按特征值分解为不变子空间的直和，其证明较困难。解决困难的方法是：1)复习行列式、伴随矩阵等概念；2）掌握矩阵系数多项式的概念，并且，能够把以多项式为元素的矩阵写为矩阵系数的多项式；3）指出，$f_A(A)\neq|AE-A|$，左右两边的含义不同，但这一误解可能是激发人们发现该定理的一个因素；4）复习直和的定义及判定方法，为证明按特征值分解为不变子空间的直和作准备，并且，从整体上将证明分为几个部分，认真研读，一步一步地搞清楚。

§4 习题类解

Ⅰ 计算题

一 线性变换在指定基下的矩阵

这类问题大体上可以分为三种类型：1) $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$用$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$，…，$\varepsilon_n$线性表出，而后由定义直接写出；2)用过渡矩阵X及相似关系$X^{-1}\Lambda X$；3)引入第三组基，使所给的两组基均与其发生关系。

例 1 在$M_2(F)$中定义线性变换σ：

$$\sigma(X)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}X.$$

试求σ在基E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22}下的矩阵。

解 因为

$$\sigma(E_{11})=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}=aE_{11}+cE_{21},$$

$$\sigma(E_{12})=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}=aE_{12}+cE_{22},$$

$$\sigma(E_{21})=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}=bE_{11}+dE_{21},$$

$$\sigma(E_{22})=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}=bE_{12}+dE_{22},$$

所以，σ在基E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22}下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

例 2 已知F^3中的线性变换σ在基$\eta_1=(-1,1,1)$，$\eta_2=(1,0,-1)$，$\eta_3=(0,1,1)$下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

试求σ在基$\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$下的矩阵.

解 因为

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

所以，η_1，η_2，η_3到ε_1，ε_2，ε_3的过渡矩阵是

$$\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}.$$

因此，σ在ε_1，ε_2，ε_3下的矩阵是

$$\left(\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\2&2&0\\3&0&2\end{pmatrix}.$$

例 3 设σ是$\mathbf{F}^3$的线性变换，$\alpha_1=(-1,0,-2)$，$\alpha_2=(0,1,2)$，$\alpha_3=(1,2,5)$是$\mathbf{F}^3$的一组基，且$\sigma(\alpha_1)=(2,0,-1)$，$\sigma(\alpha_2)=(0,0,1)$，$\sigma(\alpha_3)=(0,1,2,)$，试求$\sigma$在基$\beta_1=(-1,1,0)$，$\beta_2=(1,0,1)$，$\beta_3=(0,1,2)$下的矩阵.

解 取基$\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$，则
$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)B$，
$\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)C$，其中

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&2\\-2&2&5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\-1&1&2\end{pmatrix}.$$

从而 $\sigma(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A=\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B^{-1}A=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)CB^{-1}A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)A^{-1}CB^{-1}A$. 因此，$\sigma$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的矩阵是

$$A^{-1}CB^{-1}A=\begin{pmatrix}2&2&-1\\4&2&-1\\-2&-1&1\end{pmatrix}.$$

二　线性变换的值域与核

设n维线性空间V的线性变换σ在基ε_1，ε_2，…，ε_n下的矩阵是A，A的秩为r。求出A的列向量组η_1，η_2，…，η_n的一极大无关组η_{i_1}，η_{i_2}，…，η_{i_r}，则得到$\sigma(V)=L(\sigma(\varepsilon_{i_1}),\sigma(\varepsilon_{i_2}),\cdots,\sigma(\varepsilon_{i_r}))$。求出$AX=0$的一基础解系$(\alpha_1)$，$(\alpha_2)$，…，$(\alpha_{n-r})$，以它们为坐标的向量为$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_{n-r}$，则得到$\sigma^{-1}(0)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r})$。有时，利用关系式　σ的秩＋σ的零度$=n$　来简化计算。

例 4　设ε_1，ε_2，ε_3，ε_4是 4 维线性空间V的一组基。已知V的线性变换σ在该组基下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

试求σ的值域与核。

解　在σ的核$\sigma^{-1}(0)$中任取一向量$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3+x_4\varepsilon_4$，则由$\sigma(\alpha)=0$　得

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

求得一基础解系为(-4,-3,2,0)，(-1,-2,0,1)，从而，$\alpha_1=-4\varepsilon_1-3\varepsilon_2+2\varepsilon_3$，$\alpha_2=-\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4$ 是 $\sigma^{-1}(0)$ 的一组基，因此，$\sigma^{-1}(0)=L(\alpha_1,\alpha_2)$。

由于σ的零度是 2，所以σ的秩为 2，即A的秩为 2．而A的前两列线性无关，所以，$\sigma(\varepsilon_1)$，$\sigma(\varepsilon_2)$是$\sigma(\varepsilon_1)$，$\sigma(\varepsilon_2)$，$\sigma(\varepsilon_3)$，$\sigma(\varepsilon_4)$的一个极大无关组，因此，$\sigma(V)=L(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2))$。

三　特征值与特征向量

按§2，Ⅳ，二，2，中所列的步骤去做．在计算特征多项式时，要设法保留因式，以利于求根．

例 5 设σ是复数域C上的三维线性空间V的线性变换．σ在基ε_1，ε_2，ε_3下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

试求σ的特征值与特征向量．

解 σ的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

所以，σ的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$．

解方程组$(E-A)X=0$，得$x_1=x_3$，所以，一基础解系为$(1,0,1)$，$(0,1,0)$，从而$\varepsilon_1+\varepsilon_3$与$\varepsilon_2$是$\sigma$的属于特征值1的线性无关的特征向量．而属于1的一切特征向量是$k_1(\varepsilon_1+\varepsilon_3)+k_2\varepsilon_2=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+k_1\varepsilon_3$，其中$k_1$，$k_2$为任一组不全为零的复数．

解方程组$(-E-A)X=0$，得$x_1=-x_3$，$x_2=0$，所以，一基础解系为$(1,0,-1)$，从而σ的属于特征值-1的一切特征向量是$k(\varepsilon_1-\varepsilon_3)=k\varepsilon_1-k\varepsilon_3$，其中$k$为任意非零复数．

例 6 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量．

解 A的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&1&1\\-1&1&\lambda-1&1\\-1&1&1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3(\lambda+2),$$

所以，A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$，$\lambda_4=-2$.

解方程组$(2E-A)X=0$，得 $x_1=x_2+x_3+x_4$，所以，一基础解系为$\xi_1=(1,1,0,0)$，$\xi_2=(1,0,1,0)$,$\xi_3=(1,0,0,1)$，从而，A的属于特征值2的一切特征向量是$k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$，其中$k_1$，$k_2$，$k_3$为不全为零的数.

解方程组$(-2E-A)X=0$，得$x_1=-x_4$，$x_2=x_3=x_4$，所以，一基础解系为$\xi=(-1,1,1,1)$，从而，A的属于特征值-2的一切特征向量是$k\xi$，k是不为零的数.

四　对角化

先求出特征值与特征向量，根据所得到的线性无关的特征向量的个数确定可否对角化．而在可以对角化时，以计算过程中所得的基础解系的向量为列，作成过渡矩阵，但要注意列与特征值的对应关系.

计算n阶矩阵A的k次幂A^k．一般说来，A相似于某个对角形，按上面所述，求得X，使$X^{-1}AX$为对角形D．由相似矩阵的运算规则，得到$X^{-1}A^kX=D^k$，计算D^k，最后求得$A^k=XD^kX^{-1}$.

例7　设σ为复数域**C**上三维线性空间V的线性变换，σ在ε_1，ε_2，ε_3下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}5&6&-3\\-1&0&1\\1&2&-1\end{pmatrix},$$

试问，是否有V的一组基，使σ在该组基下的矩阵为对角形？若有，试求出该基及对角形.

解　先求σ的特征值及线性无关的特征向量.

σ的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&-6&3\\1&\lambda&-1\\-1&-2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-2),$$

所以，σ的特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=1+\sqrt{3}$，$\lambda_3=1-\sqrt{3}$.

解方程组$(2E-A)X=0$，得$x_1=-2x_2$，$x_3=0$，所以，一基础解系为$(-2,1,0)$，从而，$\eta_1=-2\varepsilon_1+\varepsilon_2$是$\sigma$的属于特征值2的一个特征向量.

解方程组$((1+\sqrt{3})E-A)X=0$，得$x_1=-3x_2$，$x_3=(-2+\sqrt{3})x_2$，所以，一基础解系为$(3,-1,2-\sqrt{3})$，从而，$\eta_2=3\varepsilon_1-\varepsilon_2+(2-\sqrt{3})\varepsilon_3$是$\sigma$的属于特征值$1+\sqrt{3}$的一个特征向量.

解方程（$(1-\sqrt{3})E-A)X=0$，得$x_1=-3x_2$，$x_3=-(2+\sqrt{3})x_2$，所以，一基础解系为$(3,-1,2+\sqrt{3})$，从而，$\eta_3=3\varepsilon_1-\varepsilon_2+(2+\sqrt{3})\varepsilon_3$是$\sigma$的属于特征值$1-\sqrt{3}$的一个特征向量.

因此，σ在基η_1，η_2，η_3下的矩阵是对角形$[2,1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}]$，基$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$，$\varepsilon_3$到基$\eta_1$，$\eta_2$，$\eta_3$的过渡矩阵是

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

例8 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求$A^k$.

解 A的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 & -2 \\ 0 & \lambda+3 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-25),$$

所以，A的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=5$，$\lambda_3=-5$.

解方程组$(E-A)X=0$，得一基础解系$(1,0,0)$.

解方程组$(5E-A)X=0$，得一基础解系$(2,1,2)$.

解方程组$(-5E-A)X=0$，得一基础解系$(1,-2,1)$，

所以，得矩阵 $X=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}$， 使得$X^{-1}AX=[1,5,-5]$，

从而$X^{-1}A^kX=[1,5^k,(-5)^k]$. 因此.

$$A^k=X[1,5^k,(-5)^k]X^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&5^k&\\&&(-5)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&5^k&\\&&(-5)^k\end{pmatrix}\left[\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&0&-5\\0&1&2\\0&-2&7\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}1&2[1+(-1)^{k+1}]5^{k-1}&[4+(-1)^k]5^{k-1}-1\\0&[1+4(-1)^k]5^{k-1}&2[1+(-1)^{k+1}]5^{k-1}\\0&2[1+(-1)^{k+1}]5^{k-1}&[4+(-1)^k]5^{k-1}\end{pmatrix}$$

当k为偶数时，$A^k=\begin{pmatrix}1&0&5^k-1\\0&5^k&0\\0&0&5^k\end{pmatrix}$；

当k为奇数时，$A^k=\begin{pmatrix}1&4\cdot5^{k-1}&3\cdot5^{k-1}-1\\0&-3\cdot5^{k-1}&4\cdot5^{k-1}\\0&4\cdot5^{k-1}&3\cdot5^{k-1}\end{pmatrix}$.

Ⅱ　证明题

一　线性变换的判定

证明线性空间的变换是线性变换时，要按定义逐条逐点进行验证；证明不是线性变换时，仅需要通过具体向量指出定义中的某一点不成立就可以了.

例 1　证明：$M_n(F)$中的变换

$$\sigma:\ \sigma(X)=AX-XA,\ \forall X\in M_n(F),$$

是线性变换，其中A是$M_n(F)$中一固定矩阵.

证明 σ是$M_n(F)$的变换，且对于$X_1, X_2 \in M_n(F), k \in F$，有$\sigma(X_1+X_2)=A(X_1+X_2)-(X_1+X_2)A=(AX_1-X_1A)+(AX_2-X_2A)=\sigma(X_1)+\sigma(X_2)$，$\sigma(kX_1)=A(kX_1)-(kX_1)A=k(AX_1-X_1A)=k\sigma(X_1)$，所以$\sigma$是线性变换。

例 2 证明：R^2中的变换σ：

$$\sigma((a,b))=\begin{cases}(a,b), & ab\geqslant 0\\(a,-b), & ab<0,\end{cases}$$

不是R^2的线性变换。

证明 对于$(-2,-3)$，$(-1,4)\in R^2$，$\sigma((-2,-3)+(-1,4))=\sigma((-3,1))=(-3,-1)$，$\sigma((-2,-3))+\sigma((-1,4))=(-2,-3)+(-1,-4)=(-3,-7)$，$\sigma((-2,-3)+(-1,4))\neq\sigma((-2,-3))+\sigma((-1,4))$，所以，$\sigma$不是线性变换。

二　变换的等式

利用已知的等式及各种运算律，展开化简，适当变形，即得到证明；或者，根据变换相等的定义，对任一向量α，用等式两端的变换去作用，而后证明所得的两个象相等。

例 3 设σ，τ是线性空间V的两个变换，且$\sigma^2=\sigma$，$\tau^2=\tau$，证明：$(\alpha+\tau)^2=\sigma+\tau\Leftrightarrow\sigma\tau=\tau\sigma=T_0$。

证明 $(\sigma+\tau)^2=(\sigma+\tau)(\sigma+\tau)=\sigma^2+\sigma\tau+\tau\sigma+\tau^2=\sigma+\sigma\tau+\tau\sigma+\tau$。

$\Rightarrow$. 由$(\sigma+\tau)^2=\sigma+\tau$，得$\sigma\tau+\tau\sigma=T_0$　(1). (1)式左乘τ，右乘τ，并利用$\tau^2=\tau$，得$\tau\sigma\tau+\tau\sigma=T_0$，$\sigma\tau+\tau\sigma\tau=T_0$，两式相减得 $\sigma\tau-\tau\sigma=T_0$　(2). (1)加(2)得，$2\sigma\tau=T_0$，所以 $\sigma\tau=T_0$；(1)减(2)得，$2\tau\sigma=T_0$，所以$\tau\sigma=T_0$。因此$\sigma\tau=\tau\sigma=T_0$。

$\Leftarrow$. 若$\sigma\tau=\tau\sigma=T_0$，则$(\sigma+\tau)^2=\sigma+\tau$。

例 4 在$F[x]$中，$\sigma(f(x))=f'(x)$，$\tau(f(x))=xf(x)$，证明：$\sigma\tau-\tau\sigma=Te$。

证明 对任意的$f(x)\in F[x]$，有

$$(\sigma\tau-\tau\sigma)(f(x))=(\sigma\tau)(f(x))-(\tau\sigma)(f(x))$$
$$=\sigma(\tau(f(x)))-\tau(\sigma(f(x)))=\sigma(xf(x))-\tau(f'(x))$$
$$=(f(x)+xf'(x))-xf'(x)=f(x)=Tc(f(x)),$$

所以，$\sigma\tau-\tau\sigma=Tc$。

说明 本例可推广为：对于任意正整数n，都有 $\sigma^n\tau-\tau\sigma^n=n\sigma^{n-1}$。

三 线性变换的性质

根据线性变换的定义及已知的性质进行证明．对有限维线性空间而言，可以考虑将线性变换的问题转化为矩阵的问题来处理．

例 5 设σ_1，σ_2，…，σ_k是线性空间V的k个互不相同的线性变换，$k\geqslant 2$，证明：在V中必存在一向量δ，使$\sigma_1(\delta),\sigma_2(\delta)$，…，$\sigma_k(\delta)$互不相同。

证明 1 对线性变换的个数k用数学归纳法。

1）当$k=2$时，由σ_1，σ_2不相同即得，必存在$\delta\in V$，使$\sigma_1(\delta)\neq\sigma_2(\delta)$，结论成立。

2）设$k-1$时成立，考虑k的情况。对于互不相同的线性变换σ_1，σ_2，…，σ_k，由归纳假设，存在$\alpha\in V$，使$\sigma_1(\alpha),\sigma_2(\alpha)$，…，$\sigma_{k-1}(\alpha)$互不相同．若有$\sigma_k(\alpha)\neq\sigma_i(\alpha)$（$i=1,2,\cdots,k-1$），则记$\alpha=\delta$，$\sigma_1(\delta)$，$\sigma_2(\delta)$，…，$\sigma_k(\delta)$互不相同，结论成立。若有$j$，$1\leqslant j\leqslant k-1$，使$\sigma_k(\alpha)=\sigma_j(\alpha)$，则当$i=1,2,\cdots,k-1$且$i\neq j$时，有$\sigma_k(\alpha)\neq\sigma_i(\alpha)$。再由$\sigma_k$与$\sigma_j$不相同得，存在$\beta\in V$，使得$\sigma_k(\beta)\neq\sigma_j(\beta)$。由$\alpha$与$\beta$作向量$\gamma=\lambda\alpha+\beta,\lambda\in \mathbf{F}$，下面证明，对于$i,l=1,2,\cdots,k$，且$i\neq l$，至多有一个$\lambda\in\mathbf{F}$，使得$\sigma_i(\gamma)=\sigma_l(\gamma)$。

若不然，设$\lambda\neq\lambda_1$，使$\sigma_i(\lambda a+\beta)=\sigma_l(\lambda a+\beta)$与$\sigma_i(\lambda_1\alpha+\beta)=\sigma_l(\lambda_1\alpha+\beta)$，则，Ⅰ）当$i$与$l$均不是$k$，或$i$与$l$中有一个为$k$而另一个不为$j$时，得到$(\lambda-\lambda_1)\sigma_i(a)=(\lambda-\lambda_1)\sigma_l(a)$，再由$\lambda\neq\lambda_1$得到$\sigma_i(a)=\sigma_l(a)$，矛盾；Ⅱ）当$i$与$l$有一个为$k$而另一个为$j$时，得到$\sigma_k(\beta)=\sigma_j(\beta)$，矛盾。

因此，对σ_1，σ_2，…，σ_k而言，至多有F中的c_k^2个数λ，使$\sigma_i(\lambda a+\beta)=\sigma_l(\lambda a+\beta)$。但是，F有无穷多个解，从而，必有$\lambda_0\in$ F，使$\sigma_1(\delta)$，$\sigma_2(\delta)$，…，$\sigma_k(\delta)$互不相同，$\delta=\lambda_0 a+\beta$。

证明 2 设$V_{ij}=\{a|a\in V且\sigma_i(a)=\sigma_j(a)\},i<j,i,j=1,2,\cdots,k$，则易证$V_{ij}$是V的子空间，从略。又，$\sigma_1$，$\sigma_2$，…，$\sigma_k$互不相同，所以，对于$\sigma_i$，$\sigma_j$，$i<j$，存在$\beta\in V$，使$\sigma_i(\beta)\neq\sigma_j(\beta)$，即$\beta\notin V_{ij}$，从而，$V_{ij}$是V的真子空间。

当V_{ij}均为V的非平凡子空间时，由第六章的已有结果知，存在$\delta\in V$，使δ不属于所有的V_{ij}，即$\sigma_1(\delta)$，$\sigma_2(\delta)$，…，$\sigma_k(\delta)$互不相同。

当$\{V_{ij}\}$中有平凡子空间时，则只能是零空间，此时，只要$a\in V$，$a\neq 0$，就有$\sigma_i(a)\neq\sigma_j(a)$，将这种平凡子空间去掉，剩下的非平凡子空间，归结为已证的情况，从而，仍存在$\delta\in V$，使$\sigma_1(\delta)$，$\sigma_2(\delta)$，…，$\sigma_k(\delta)$互不相同。

例 6 设V是F上的n维线性空间，σ是V的线性变换，并且σ与V的全体线性变换可交换，证明：σ是数乘变换。

证明 取V的一组基ε_1，ε_2，…，ε_n，设σ在该组基下的矩阵为A。因为，在基ε_1，ε_2，…，ε_n之下，V的线性变换与n阶矩阵一一对应，且保持运算，所以，由条件知，A与一切n阶矩阵可交换。又，与一切n阶矩阵可交换的矩阵必为数量矩阵，而数量矩阵与数乘变换相对应，所以，A是数量矩阵，σ是数乘变换。

四　矩阵相似

根据矩阵相似的定义，找到X，使$B=X^{-1}AX$；或者，证明A与B是线性空间V的线性变换σ在不同基下的矩阵。

例 7 设有两个n阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1\cdots1\\1&1\cdots1\\\cdots&\cdots\\1&1\cdots1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}n&0\cdots0\\0&0\cdots0\\\cdots&\cdots\\0&0\cdots0\end{pmatrix},$$

证明A与B相似.

证明 1 因为$P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k))$，所以由矩阵的乘法得到$P(1,2(1))P(2,3(1))\cdots P(n-1,n(1))AP(n-1,n(-1))\cdots P(2,3(-1))P(1,2(-1))=B_1$,

$$P\left(2,1\left(-\frac{n-1}{n}\right)\right)\cdots P\left(n,(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\right)B_1\cdot$$

$$P\left(n,\ (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)\right)\cdots P\left(2,1\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)=B,$$

所以，A与B相似.

证明 2 设V是数域F上的n维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是V的一组基，则有V的线性变换$\sigma$，使$\sigma$在$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$，…，$\varepsilon_n$下的矩阵为B，即$\sigma(\varepsilon_1)=n\varepsilon_1$，$\sigma(\varepsilon_i)=0$，$i=2$，3，…，$n$.

设 $\eta_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n$，$\eta_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2$，$\eta_3=\varepsilon_1-\varepsilon_3$，…，$\eta_n=\varepsilon_1-\varepsilon_n$，则易证$\eta_1,\eta_2$，…，$\eta_n$线性无关，从而作成V的一组基.易知$\sigma(\eta_1)=\sigma(\eta_2)=\cdots=\sigma(\eta_n)=n\varepsilon_1=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n$

所以，σ在基η_1，η_2，…，η_n下的矩阵是A.

因此，A与B相似.

例 8 设A与B是数域F上的两个n阶矩阵，$A^n=B^n=0$，但$A^{n-1}\neq 0$，$B^{n-1}\neq 0$，$n\geqslant 1$，证明A与B相似.

证明 1) 设V是数域F上的n维线性空间. ε_1，ε_2，…，ε_n是V的一组基，则有V的一线性变换σ，使σ在ε_1，ε_2，…，ε_n下的矩阵是A. 由$A^n=0$但$A^{n-1}\neq 0$知$\sigma^n=T_0$但$\sigma^{n-1}\neq T_0$，从而有$\alpha\in V$，使$\sigma^n(\alpha)=0$但$\sigma^{n-1}(\alpha)\neq 0$. 可以证明，$\alpha$，$\sigma(\alpha)$，…，$\sigma^{n-1}(\alpha)$线性无关，从而作成V的一组基，此处从略. 易知，$\sigma$在基$\alpha$，$\sigma(\alpha)$，…，$\sigma^{n-1}(\alpha)$下的矩阵是

$$N=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix},$$

所以，A与N相似。

2）同理可证，B与N相似。

3）因此，A与B相似。

五　特征值与特征向量、对角化

根据特征值与特征向量的定义与性质，以及可以对角化的条件，进行证明。

例 9　设σ，τ是有限维线性空间 V的线性变换，证明$\sigma\tau$与$\tau\sigma$有相同的特征值。

证明 1　设λ是$\sigma\tau$的特征值。

若$\lambda=0$，则易知$\sigma\tau$不是单射，证明从略。由于 V是有限维的，所以$\sigma\tau$是不可逆的，从而σ或τ是不可逆的，因此$\tau\sigma$是不可逆的，0是$\tau\sigma$的特征值。

若$\lambda\neq0$，则存在 V的向量$a\neq0$，使$(\sigma\tau)(a)=\lambda a$。设$\beta=\tau(a)$，则由$a\neq0$，$\lambda\neq0$得，$\sigma(\beta)=(\sigma\tau)(a)=\lambda a\neq0$，从而$\beta\neq0$。所以，$(\tau\sigma)(\beta)=(\tau\sigma)(\tau(a))=\tau((\sigma\tau)(a))=\tau(\lambda a)=\lambda(\tau(a))=\lambda\beta$，因此，$\lambda$是$\tau\sigma$的特征值。

同理可证，若λ是$\tau\sigma$的特征值，则λ也是$\sigma\tau$的特征值。因此，$\sigma\tau$与$\tau\sigma$有相同的特征值。

证明 2　设σ，τ在 V的某组基下的矩阵分别是A，B，又，E是n阶单位矩阵，λ是一个文字，则由

$$\begin{pmatrix} E & -A \\ 0 & \lambda E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \lambda E \\ E & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \lambda E-AB \\ \lambda E & \lambda B \end{pmatrix}$$

两边取行列式得　$\lambda^n\begin{vmatrix} A & \lambda E \\ E & B \end{vmatrix}=\lambda^n(-1)^{n^2}|\lambda E-AB|$.

同理，由　$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -B & \lambda E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \lambda E \\ E & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & \lambda E \\ \lambda E-BA & 0 \end{pmatrix}$

得　$\lambda^n\begin{vmatrix} A & \lambda E \\ E & B \end{vmatrix}=\lambda^n(-1)^{n^2}|\lambda E-BA|$.

所以，$|\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|$，$\sigma\tau$与$\tau\sigma$有相同的特征多项式。因此，$\sigma\tau$与$\tau\sigma$有相同的特征值。

例10 设A，B都是数域**F**上的n阶矩阵。若有**F**上的n阶可逆矩阵X，使$X^{-1}AX$，$X^{-1}BX$同时为对角形，则 $AB=BA$。反之，若A，B都可与对角形相似，且$AB=BA$，则有**F**上的n阶可逆矩阵X，使$X^{-1}AX$，$X^{-1}BX$同时为对角形。

证明 1）由于$X^{-1}AX$，$X^{-1}BX$同时为对角形，所以$(X^{-1}AX)(X^{-1}BX)=(X^{-1}BX)(X^{-1}AX)$，因此，$AB=BA$。

2）设 V是数域**F**上的n维线性空间，取 V的一组基(Δ)，则有V的线性变换σ，τ，使得σ，τ在基(Δ)下的矩阵分别为 A，B。由$AB=BA$得$\sigma\tau=\tau\sigma$。

由于A与对角形相似，所以 V可以分解为：

$$V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_t} \tag{1}$$

其中λ_i为σ的特征值，V_{λ_i}为σ的属于特征值λ_i的特征子空间。

由于B与对角形相似，所以τ有n个特征向量β_1，β_2，…，β_n作成 V的一组基。不妨设β_1是τ的属于特征值ρ_1的特征向量，由于$\beta_1\in V$，所以可以把β_1按(1)式分解，得

$$\beta_1=a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1t},\quad a_{1i}\in V_{\lambda_i} \tag{2}$$

表法是唯一的。由$a_{1i}\in V_{\lambda_i}$知a_{11}，a_{12}，…，a_{1t}中除零向量之外，都是σ的特征向量。下面证明，a_{11}，a_{12}，…，a_{1t}中除零向量外，都是τ的特征向量。

用τ作用于(2)的两边，有

$$\tau(\beta_1)=\rho_1\beta_1=\rho_1a_{11}+\cdots+\rho_1a_{1t} \tag{3}$$

$$\tau(\beta_1)=\tau(a_{11})+\cdots+\tau(a_{1t}) \tag{4}$$

由于$\sigma\tau=\tau\sigma$，所以可证 V_{λ_i}在τ之下不变，因此，$\tau(a_{1i})\in V_{\lambda_i}$，从而(3)，(4)都是$\tau(\beta_1)$的按(1)式的分解式，由唯一性知，$\tau(a_{1i})=\rho_1a_{1i}$，$i=1, 2, \cdots, t$，即$a_{11}$，$a_{12}$，…，$a_{1t}$中除了零向量之外，都是$\tau$的特征向量，自然同时也是$\sigma$的特征向量。

同上，依次对β_2，…，β_n讨论，最后得到

$$\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1t}; \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2t}; \cdots; \alpha_{n1}, \cdots, \alpha_{nt} \quad (5)$$

并且，(5)中除零向量外，都是τ和σ的公共特征向量。β_1，β_2，…，β_n可由(5)线性表出，又由β_1，β_2，…，β_n是V的一组基知，(5)可由β_1，β_2，…，β_n线性表出，所以(5)与β_1，β_2，…，β_n可以互相线性表出，从而可以在(5)中找到n个线性无关的向量作成V的一组基(*)。在基(*)之下，σ，τ的矩阵均为对角形。设V的基(Δ)到(*)的过渡矩阵是X，则$X^{-1}AX$，$X^{-1}BX$分别是σ，τ在(*)下的矩阵，即$X^{-1}AX$，$X^{-1}BX$同时为对角形。

六　不变子空间

根据不变子空间的定义进行证明，有时与特征值、特征向量、特征多项式联系在一起，所以，要注意综合使用各种有关的知识。

例11　设σ是数域**F**上向量空间V的一个线性变换，并且$\sigma^2=\sigma$。证明：

1）$\sigma^{-1}(0)=\{\xi-\sigma(\xi)|\xi\in V\}$；

2）$V=\sigma^{-1}(0)\oplus\sigma(V)$；

3）若τ是V的线性变换，则$\sigma^{-1}(0)$和$\sigma(V)$都是τ的不变子空间$\Leftrightarrow\sigma\tau=\tau\sigma$。

证明　1）设$W=\{\xi-\sigma(\xi)\mid\xi\in V\}$。对任意$\xi\in V$，$\sigma(\xi-\sigma(\xi))=\sigma(\xi)-\sigma^2(\xi)=0$，所以$W\subseteq\sigma^{-1}(0)$。对任意的$\eta\in\sigma^{-1}(0)$，有$\sigma(\eta)=0$，所以$\eta-\sigma(\eta)\in W$，从而$\sigma^{-1}(0)\subseteq W$。因此，$\sigma^{-1}(0)=\{\xi-\sigma(\xi)|\xi\in V\}$。

2）因为，对任意$\xi\in V$，$\xi=(\xi-\sigma(\xi))+\sigma(\xi)$，所以，$V=\sigma^{-1}(0)+\sigma(V)$。对于任意$\eta\in\sigma^{-1}(0)\cap\sigma(V)$，有$\eta\in\sigma^{-1}(0)$且$\eta\in\sigma(V)$，所以，存在$\zeta\in V$使$\sigma(\zeta)=\eta$且$\sigma(\eta)=0$，从而$\eta=\eta-\sigma(\eta)=\eta-\sigma^2(\zeta)=0$，因此，$\sigma^{-1}(0)\cap\sigma(V)=\{0\}$，$V=\sigma^{-1}(0)\oplus\sigma(V)$。

3）⇒.对任意$\alpha\in V$，由2），$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，其中$\alpha_1\in\sigma^{-1}(0)$，$\alpha_2\in\sigma(V)$，存在$\beta$使$\alpha_2=\sigma(\beta)$。因为$\sigma^{-1}(0)$，$\sigma(V)$都是$\tau$的不变子空间，所以$(\tau\sigma)(\alpha)=(\tau\sigma)(\alpha_1)+(\tau\sigma)(\alpha_2)=(\tau\sigma)(\alpha_2)=(\tau\sigma)(\sigma(\beta))=(\tau\sigma^2)(\beta)=(\tau\sigma)(\beta)\in\sigma(V)$，从而存在$\gamma\in V$使$(\tau\sigma)(\beta)=\sigma(\gamma)$。而$(\sigma\tau)(\alpha)=(\sigma\tau)(\alpha_1)+(\sigma\tau)(\alpha_2)=(\sigma\tau)(\alpha_2)=(\sigma\tau)(\sigma(\beta))=\sigma((\tau\sigma)(\beta))=\sigma(\sigma(\gamma))=\sigma(\gamma)$。因此，$(\tau\sigma)(\alpha)=(\sigma\tau)(\alpha)$，即$\tau\sigma=\sigma\tau$。

⇐。设$\sigma\tau=\tau\sigma$。对于$\sigma^{-1}(0)$中的任意向量$\xi-\sigma(\xi)$，有$\tau(\xi-\sigma(\xi))=\tau(\xi)-(\tau\sigma)(\xi)=\tau(\xi)-\sigma(\tau(\xi))\in\sigma^{-1}(0)$，所以$\sigma^{-1}(0)$是$\tau$的不变子空间。对于任意$\eta\in\sigma(V)$，存在$\xi\in V$，使$\eta=\sigma(\xi)$，有$\tau(\eta)=\tau(\sigma(\xi))=(\tau\sigma)(\xi)=\sigma(\tau(\xi))\in\sigma(V)$，所以，$\sigma(V)$是$\tau$的不变子空间。

例12 设V是数域**F**上的n维线性空间，σ是V的线性变换，证明：

1）若W是V的非平凡不变子空间，则$\sigma|W$的特征多项式$f_{(\sigma|W)}(\lambda)$整除$f_\sigma(\lambda)$；

2）若σ有n个互异的特征值，则σ共有2^n个不变子空间

证明 1）取W的一组基$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_m$，将它扩充为V的一组基$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_m,\ \varepsilon_{m+1},\ \cdots,\ \varepsilon_n$。设$\sigma$在该组基下的矩阵为A，则

$$A=\begin{pmatrix}B & C\\ 0 & D\end{pmatrix},$$

其中B为$\sigma|W$在W的基$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\cdots,\ \varepsilon_m$下的矩阵。从而，

$$f_\sigma(\lambda)=f_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda E_m-B & -C\\ 0 & \lambda E_{n-m}-D\end{vmatrix}=f_B(\lambda)f_D(\lambda).$$

但$f_{(\sigma|W)}(\lambda)=f_B(\lambda)$，所以$f_{(\sigma|W)}(\lambda)$整除$f_\sigma(\lambda)$。

2）设$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\lambda_n$为$\sigma$的$n$个互异的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$分别为$\sigma$的属于$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$的特征向量，则$\alpha_1,\ \alpha_2,$

…，α_n线性无关，且$f_\sigma(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$.

设W是σ的m维不变子空间，$m\geqslant 1$，则由 1) 知，$f_{(\sigma|W)}(\lambda)=(\lambda-\lambda_{i_1})(\lambda-\lambda_{i_2})\cdots(\lambda-\lambda_{i_m})$，所以，W中有$\sigma$的特征向量$\alpha_{i_1}$，$\alpha_{i_2}$，…，$\alpha_{i_m}$作成它的基．反之，具有这样的基的子空间是$\sigma$的不变子空间．因此，$\sigma$共有$2^n$个不变子空间．

§5　补充资料

I　线性映射

设 V与 V′是数域**F**上的两个线性空间，σ是 V到 V′的映射．若σ满足

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\ \forall\alpha,\beta\in V,$$
$$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha),\ \forall\alpha\in V,\ \forall k\in \mathbf{F},$$

则称σ是 V到 V′的线性映射或线性算子．

当 V= V′时，线性映射就变为线性变换．

设 V与 V′分别是n维与m维线性空间，σ是到 V到 V′的线性映射．任意取定 V的一组基ε_1，ε_2，…，ε_n与 V′的一组基ε_1'，ε_2'，…，ε_m'．若

$$\begin{cases}\sigma(\varepsilon_1)=a_{11}\varepsilon_1'+a_{21}\varepsilon_2'+\cdots+a_{m1}\varepsilon_m'\\ \sigma(\varepsilon_2)=a_{12}\varepsilon_1'+a_{22}\varepsilon_2'+\cdots+a_{m2}\varepsilon_m'\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma(\varepsilon_n)=a_{1n}\varepsilon_1'+a_{2n}\varepsilon_2'+\cdots+a_{mn}\varepsilon_m'\end{cases}$$

即，可以“形式地”写为

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))=(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_m')A,$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix},$$

则称A是线性映射σ在基ε_1，ε_2，…，ε_n与基ε_1'，ε_2'，…，ε_m'下的矩阵。

若σ在基ε_1，ε_2，…，ε_n与基ε_1'，ε_2'，…，ε_m'下的矩阵是A，在基η_1，η_2，…，η_n与基η_1'，η_2'，…，η_m'下的矩阵是B，ε_1，ε_2，…，ε_n到η_1，η_2，…，η_n的过渡矩阵是P，ε_1'，ε_2'，…，ε_m'到η_1'，η_2'，…，η_m'的过渡矩阵是Q，则$B=Q^{-1}AP$。

若σ在基ε_1，ε_2，…，ε_n与基ε_1'，ε_2'，…，ε_m'下的矩阵是A，其秩为r，则存在基η_1，η_2，…，η_n与基η_1'，η_2'，…，η_m'，使σ在基η_1，η_2，…，η_n与基η_1'，η_2'，…，η_m'下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_{rr} & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Ⅱ　根子空间

设V是数域**F**上的线性空间，σ是V的线性变换．若对于$\rho\in$ **F**，存在$\alpha\in V$，$\alpha\neq 0$，使得$(\rho Te-\sigma)^h(\alpha)=0$，其中$h$为正整数，则称$\alpha$是$\sigma$的属于$\rho$的根向量。

若σ的属于ρ的根向量存在，则ρ是σ的一个特征值．反之，若ρ是σ的特征值，则σ的属于ρ的根向量必存在。

属于线性变换σ的某一固定特征值ρ的所有根向量再添上零向量，组成V的一个子空间，称为σ的属于特征值ρ的根子空间。

属于σ的不同特征值的根向量线性无关。

若ρ_1，ρ_2，…，ρ_s是线性变换σ的不同的特征值，α_1，α_2，…，α_s分别是属于ρ_1，ρ_2，…，ρ_s的根向量，$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$，$\alpha\in W$，W是$\sigma$的不变子空间，则$\alpha_i\in W$，$i=1,2,\cdots,s$。

不同的根子空间的交是零空间，从而其和是直和。

若α是σ的属于ρ的根向量，$(\rho Te-\sigma)^m(\alpha)=0$，但$(\rho Te-\sigma)^{m-1}(\alpha)\neq 0$，则称$\alpha$是$\sigma$的属于特征值$\rho$的$m$次根向量。

n维线性空间中的任何根向量的次数都不大于n.

若有一个σ的属于特征值ρ的n次根向量，则σ在V的某组基下的矩阵是若当块.

Ⅴ　极小多项式

设V是数域**F**上的n维线性空间，σ是V的线性变换，$g(\lambda)$是**F**上的首1多项式．若$g(\lambda)$是使$g(\sigma)=T_0$的次数最小的多项式，则称$g(\lambda)$是σ的极小多项式，也称为最小多项式.

σ的极小多项式存在且唯一.

若$g(\lambda)$是σ的极小多项式，$f(\lambda)$为**F**上的任一多项式，则$f(\sigma)=T_0\Leftrightarrow g(\lambda)|f(\lambda)$.

类似地定义n阶矩阵的极小多项式，并证明上面的两条结论．进而，相似矩阵有相同的极小多项式．若$A=[A_1,A_2,\cdots,A_s]$，则A的极小多项式是$A_1,A_2,\cdots,A_s$的极小多项式的最小公倍式.

就一定意义上来说，一线性变换的极小多项式就是某一类矩阵的极小多项式.

k阶若当块$J(\lambda_0,k)$的极小多项式为$(\lambda-\lambda_0)^k$.

数域**F**上n阶矩阵A与对角形矩阵相似的必要充分条件为A的极小多项式是**F**上互素的一次因式的乘积.

数域**F**上的n维线性空间V的线性变换σ在V的某组下的矩阵为对角形的必要充分条件是σ的极小多项式是**F**上互素的一次因式的乘积.

复数域**C**上n阶矩阵A与对角形相似的必要充分条件为A的极小多项式没有重根.

Ⅵ　商空间的诱导变换

设V是数域**F**上的n维线性空间，σ是V的线性变换，M是σ的不变子空间．作

$\overline{\sigma}$: $V/M\to V/M$, $\overline{\sigma}(\alpha+M)=\sigma(\alpha)+M$, $\forall\alpha\in V$,

则$\overline{\sigma}$是V/M的一个变换，并且是线性变换．称$\overline{\sigma}$是σ在商空间

V/M内的诱导变换。

在M内取一组基ε_1，ε_2，…，ε_r，扩充为V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2$，…，$\varepsilon_r$，$\varepsilon_{r+1}$，…，$\varepsilon_n$。设

$$\sigma(\varepsilon_{r+k})=a_{r+1,r+k}\varepsilon_{r+1}+\cdots+a_{n,r+k}\varepsilon_n+\beta_{r+k},$$

其中$k=1,2,\cdots,n-r$，$\beta_{r+k}\in$ M，则$\varepsilon_{r+1}+$M，$\varepsilon_{r+2}+$M，…，ε_n+M组成V/M的一组基。并且

$$\bar{\sigma}(\varepsilon_{r+k}+M)=\sigma(\varepsilon_{r+k})+M$$

$\bar{\sigma}(\varepsilon_{r+k}+M)=\sigma(\varepsilon_{r+k})+M=(a_{r+1,r+k}\varepsilon_{r+1}+\cdots+a_{n,r+k}\varepsilon_n)+M=a_{r+1,r+k}(\varepsilon_{r+1}+M)+\cdots+a_{n,r+k}(\varepsilon_n+M)$，

从而，$\bar{\sigma}$在V/M的基$\varepsilon_{r+1}+$M，…，ε_n+M下的矩阵为

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} a_{r+1,r+1} \cdots a_{r+1,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,r+1} \quad \cdots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

此时，σ在基ε_1，ε_2，…，ε_r，ε_{r+1}…，ε_n下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}.$$

σ的特征多项式为$f_\sigma(\lambda)=|\lambda E-A_1||\lambda E-\bar{A}|$。因此，$\bar{\sigma}$的特征多项式$f_{\bar{\sigma}}(\lambda)=|\lambda E-\bar{A}|$是$\sigma$的特征多项式$f_\sigma(\lambda)$的因式。

V　二阶三阶矩阵的若当形

设V是数域F上的n维线性空间，σ是V的线性变换。若σ的特征多项式的根全在F中，则σ的任意r个线性无关的特征向量η_1，η_2，…，η_r($r\geqslant 1$)均可以扩充为V的一组基η_1，η_2，…，η_r，η_{r+1}，…，η_n，使σ在这组基下的矩阵为如下形式

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

其中A_1，A_3分别为r阶与$n-r$阶矩阵，且

$$A_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \end{pmatrix},\qquad A_3=\begin{pmatrix} a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

设σ是复数域上二维线性空间V的一个线性变换，则有V的一组基η_1，η_2，使σ在该组基下的矩阵为下列两种形式之一：

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}.$$

设σ是复数域上三维线性空间V的一个线性变换，则有V的一组基η_1，η_2，η_3，使σ在该组基下的矩阵为下列三种形式之一：

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}.$$

Ⅵ　幂零矩阵的标准形式

设V是数域**F**上的n维线性空间，σ是V的线性变换。若存在正整数m，使$\sigma^m=T_0$，则称σ是一个幂零变换。

当σ是幂零变换时，一定存在最小的正整数r，使$\sigma^r=T_0$，从而，σ的极小多项式是x^r。于是，存在$\xi_0\in V$，使$\sigma^r(\xi_0)=0$，而$\sigma^{r-1}(\xi_0)\neq 0$，所以$\xi_0$，$\sigma(\xi_0)$，…，$\sigma^{r-1}(\xi_0)$线性无关，而由这些向量生成的子空间W是$r$维的。W称为关于$\sigma$的一个循环子空间，简称$\sigma$-循环子空间。

若存在一个向量ξ_0和一个正整数r，使得，1) ξ_0，$\sigma(\xi_0)$，…，$\sigma^{r-1}(\xi_0)$构成W的一组基，2)$\sigma^r(\xi_0)=0$，则称ξ_0是循子空间W的一个生成向量，称ξ_0，$\sigma(\xi_0)$，…，$\sigma^{r-1}(\xi_0)$是W的一个循环基。

若W是一个σ-循环子空间，而ξ_0，$\sigma(\xi_0)$，…，$\sigma^{r-1}(\xi_0)$是W的一个循环基，则σ在W上的限制$\sigma|W$是W的一个幂零变换，并且在这组基下的矩阵是形如

$$N_r=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}$$

的一个r阶矩阵，N_r称为一个r阶幂零若当矩阵或幂零若当块。

设σ是n维线性空间V的一个幂零线性变换，则V可以分解为σ-循环子空间的直和$V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$，并且$r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots\geqslant r_s$，$r_i=dimW_i$，$i=1,2,\cdots,s$。

每一个n阶幂零矩阵都与一个形如$N=[N_{r_1},N_{r_2},\cdots,N_{r_s}]$的矩阵相似，其中$N_{r_i}$是一个$r_i$阶幂零若当块，$r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots\geqslant r_s$。

设σ是n维线性空间V的一个幂零线性变换。若有两种方式将V分解为σ-循环子空间的直和$V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_t$，并且$dimW_i=r_i$，$i=1,2,\cdots,s$，$dimU_j=p_j$，$j=1,2,\cdots,t$，满足$r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots\geqslant r_s$，$p_1\geqslant p_2\geqslant\cdots\geqslant p_t$，则$s=t$，$r_i=p_i$，$i=1,2,\cdots,s$。

Ⅶ　特征值的计算与估计

当n较大时，利用定义求n阶矩阵A的特征值是很困难的，原因在于：1)将行列式$|\lambda E-A|$展开为λ的n次多项式，计算量巨大；2)求出n次多项式$f_A(\lambda)$的根，没有一般的方法。因此，必须探讨求矩阵的特征值的一些有效的方法。现在已找到了许多这样的方法，最常见的是：1)克雷洛夫方法；2)达尼列夫斯基方法；3)勒弗里叶方法。

复数域上n阶矩阵的n个特征值是复平面上的n个点，对于它们所在的位置，给出一个范围，就是特征值的估计问题。这方面的结果很多，此处仅列出两个基本的定理。

圆盘定理1．设$A=(a_{ij})$为任意n阶复矩阵，则A的特征值都在复平面上的n个圆$|z-a_{ii}|\leqslant R_i$，$i=1,2,\cdots,n$的并集内，其中$R_i=|a_{i1}|+\cdots+|a_{i,i-1}|+|a_{i,i+1}|+\cdots+|a_{in}|$

圆盘定理2．由圆盘定理1的所有圆组成的连通部分中任意取一个，若它是由k个圆组成的，则在这个连通部分中必有且只有A的k个特征值（对角线元素有相同时重复计算，特征值有相同时也重复计算）。

Ⅷ 历史资料点滴

从行列式理论中带来的另一个概念是n阶矩阵的特征方程，它定义为$|M-\lambda E|=0$，这里，$|M-\lambda E|$是矩阵$M-\lambda E$的行列式，而E是单位矩阵。这一术语是由柯西引进用于行列式的。

特征方程的概念隐含地出现在欧拉的化三个变数的二次型到它们的主轴上去的著作中，但他对特征根的实性没有给出证明。

特征方程的概念首先明确地出现在拉格朗日关于线性微分方程组的著作中，也出现于拉普拉斯在同一领域的著作中。拉普拉斯的特征方程（也称长期方程）联系于一个六阶行列式，而λ的值确定了微分方程组的解。

柯西从欧拉、拉格朗日、拉普拉斯的著作中认识了共同的特征值问题。他在1826年的《几何中无穷小演算的应用教程》中着手研究化简三个变数的二次型的问题，并证明了特征方程在直角坐标系的任何变换下是不变的。他在1829年的《数学练习》中，开始研究行星轨道的长期不等式，证明了用一个线性变换同时化两个二次型为平方和，再次用到特征根概念。

在1858年的文章中，凯莱宣告了一个结果，现在称为任意阶矩阵的Cayley-Hamilton定理。这定理说，在特征方程$|M-\lambda E|=0$中，用M代替λ，则得到的矩阵是零矩阵。凯莱说，他对3阶的情况进行了验证，又说进一步的证明是不必要的。哈密尔顿与这定理的关系是根据下列事实，即在他的《四元数讲义》中引进向量的线性向量函数，涉及到一个线性变换，该变换的矩阵满足它的特征方程。弗罗宾纽斯在他1878年的文章中给出了这定理的第一个一般性的证明，且对矩阵的特征根有一些是相等的情况修改了这个定理，并提出了极小多项式的概念。

弗罗宾纽斯对于特征方程提出了一个问题，他要找极小多项式，即矩阵所满足的次数最低的多项式。他说，它是由特征多项式的因式所形成的，而且是唯一的。Kurt Hensel（1861—1941）

在1904年的文章中证明了唯一性，还证明了极小多项式整除化零多项式。

Heniy Jaber在1890年的一篇文章里作为显然的事实断言：设$x^n-m_1x^{n-1}+m_2x^{n-2}-\cdots\pm m_n=0$是任一$n$阶矩阵M的特征方程，则M的行列式是$m_n$。若把矩阵的主子式理解为这样的子式的行列式，这些子式的对角线是矩阵M的主对角线的一部分，则m_i是i阶子式的和。于是特别地，m_1是主对角线元素的和，它也是特征根的和，这和称为矩阵的迹。断言的证明是由别人给出的。

§6 基本习题

1 下面所定义的变换是不是线性变换？

1）在线性空间V中，$\sigma(\alpha)=\alpha+\beta$，$\beta\in V$是一个固定向量；

2）在线性空间V中，$\sigma(\alpha)=\beta$，$\beta\in V$是一个固定向量；

3）在$\mathbf{F}^3$中，$\sigma((x_1,x_2,x_3))=(x_1^2,x_2+x_3,x_3^2)$。

2 证明下列变换是线性变换：

1）在$M_n(\mathbf{F})$中，$\sigma(X)=BXC$，B，$C\in M_n(\mathbf{F})$是两个固定矩阵；

2）在实数域上的线性空间$C[a,b]$中定义变换$\sigma(f(x))=\int_a^x k(t)f(t)dt$，其中$k(t)$是$C[a,b]$上的一个固定的连续函数。

3 在$M_2(\mathbf{F})$中，定义

$$\sigma_1\left(\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ \sigma_2\left(\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}r_1a_1 & 0\\ 0 & r_2b_2\end{pmatrix},$$

r_1，$r_2\in\mathbf{F}$，求证σ_1，σ_2都是$M_2(\mathbf{F})$的线性变换，并求$\sigma_1+\sigma_2$，$\sigma_1\sigma_2$。

4 上题中，分别求σ_1，σ_2在基E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22}下的

矩阵。

5　3维线性空间V的线性变换σ在V的基ε_1，ε_2，ε_3下的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix},$$

试求σ的特征值与特征向量。

6　计算 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^k$.

7　证明：若σ，τ是n维线性空间V的任意两个线性变换，则$\sigma\tau-\tau\sigma\neq Te$。

8　设A是n阶矩阵，$n>1$，$A\neq 0$，但$A^m=0$，证明A不能与对角形矩阵相似。

9　证明：若线性空间V的线性变换σ以V中的每个非零向量作为它的特征向量，则σ是数乘变换。

10　σ_D表示线性空间$F[x]_n$的微分变换：$\sigma_D(f(x))=f'(x)$，证明σ_D的全部非零不变子空间有n个，它们是$F[x]_m$，$0<m\leqslant n$.

第八章　λ-矩阵

§1　概括说明

通过求特征值与特征向量来化简矩阵，仅能解决对角形的问题，即，若矩阵A与对角形矩阵相似，则可求得可逆矩阵X，使$X^{-1}AX$是对角形矩阵；而且，计算相当复杂。为了在一般情况下化简矩阵，就必须从理论上考虑另外的方法，于是就产生了λ-矩阵的理论。

求特征值与特征向量，首先求特征多项式$|\lambda E-A|$的根，而且，A可否化简，部分地取决于$|\lambda E-A|$的根的情况，从而就引导人们考虑A的特征矩阵$\lambda E-A$，该矩阵的元素中含有文字λ，换言之，其元素是λ的多项式，这就是一个λ-矩阵。

通过研究λ-矩阵，进一步解决矩阵化简的问题，给出了矩阵的各种"标准形"，建立了完备的理论。而且，通过初等变换这样的简单可行的步骤，就可以具体地求出标准形（当然，没有求出过渡矩阵）。因此，λ-矩阵的理论是十分重要的，λ-矩阵是研究矩阵的一个有力工具。

本章中，λ-矩阵用$A(\lambda)$，$B(\lambda)$，…表示，而A，B，…表示矩阵，即以前各章中以数字为元素的矩阵，有时，为了强调，说成数字矩阵。由于数字也是λ的多项式，所以矩阵也是λ-矩阵。

本章的内容分为四个部分：λ-矩阵及其标准形，不变因子与初等因子，矩阵相似的条件，若当标准形。

如同第四章那样，对λ-矩阵，要讨论加法、乘法、行列式、子式、秩、可逆，要研究初等变换、等价、标准形，研究行列式因子，从而证明标准形的唯一性。

不变因子、初等因子，是λ-矩阵自身的理论问题，同时是研究矩阵的各种标准形的基础与工具。

本章中所述矩阵相似的条件，主要是：n阶矩阵A与B相似当且仅当（λ-矩阵）$\lambda E-A$与$\lambda E-B$等价。从而，奠定了用λ-矩阵研究数字矩阵的基础。

用λ-矩阵的理论研究复数矩阵，证明了上一章中关于若当标准形的遗留定理，并且，给出了具体的求法。

本章的补充资料是：λ-矩阵的除法，Frobenius 标准形，Jacobson 标准形，历史资料点滴。

§2 内容提要

I λ-矩阵及其标准形

一 定义、运算、行列式、秩

1 定义

设**F**是一个数域，λ是一个文字，作多项式环**F**$[\lambda]$。若一个矩阵的元素是**F**$[\lambda]$中的多项式，则称该矩阵是数域**F**上的一个λ-矩阵，记作$A(\lambda)$，$B(\lambda)$，…。

数域**F**上的矩阵仍记为A，B，…，为了强调与λ-矩阵的区别，有时称为数字矩阵。当然，数字矩阵也是λ-矩阵。

两个λ-矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$相等$\Leftrightarrow A(\lambda)$与$B(\lambda)$都是$m\times n$矩阵，且任意$(i,\ j)$元素均对应相等。

2 运算

加法。两个$m\times n$的λ-矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$相加，就是对应位置上的元素相加，其和记作$A(\lambda)+B(\lambda)$。加法适合交换律、结合律。由$B(\lambda)$可以定义$-B(\lambda)$，从而定义减法：$A(\lambda)-B(\lambda)=A(\lambda)+(-B(\lambda))$。

乘法。$m\times n$的λ-矩阵$A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))$与$n\times s$的$\lambda$-矩阵$B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))$相乘，其积是一个$m\times s$矩阵，记作$A(\lambda)B(\lambda)$，

积的(i, j)元素为$\sum_{t=1}^{n} a_{it}(\lambda)b_{tj}(\lambda)$。乘法适合结合律，不适合交换律，乘法对加法适合（左与右）两个分配律。

3　行列式与子式

$n\times n$的λ-矩阵矩阵$A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))$的行列式定义为

$$|A(\lambda)|=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}(\lambda)a_{2j_2}(\lambda)\cdots a_{nj_n}(\lambda).$$

λ-矩阵的行列式具有第二章中关于行列式的各种性质及展开规则。

对于两个$n\times n$的λ-矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$，成立$|A(\lambda)B(\lambda)|=$
$=|A(\lambda)||B(\lambda)|$。

在$m\times n$的λ-矩阵$C(\lambda)$中，固定k行k列，其交点处的k^2个元素组成一个k阶行列式，称为$C(\lambda)$的一个k阶子式。其中，$1\leqslant k\leqslant min(m, n)$。

4　秩

若λ-矩阵$A(\lambda)$中有一个$r(\geqslant 1)$阶子式不为零，而所有$r+1$阶子式（若还有的话）全为零，则称$A(\lambda)$的秩为r。零矩阵的秩为零。

按照上述定义求秩相当麻烦，可以用后面的方法求出。

二　可逆λ-矩阵

设$A(\lambda)$是一个$n\times n$的λ-矩阵。若有一个$n\times n$的λ-矩阵$B(\lambda)$，使$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=E$，其中$E$是$n$阶单位矩阵，则称$A(\lambda)$是可逆矩阵，称$B(\lambda)$是$A(\lambda)$的一个逆矩阵。

若$A(\lambda)$可逆，则其逆矩阵唯一，记作$A^{-1}(\lambda)$。

$n\times n$的λ-矩阵$A(\lambda)$可逆$\Leftrightarrow|A(\lambda)|$是一个非零常数。

若$n\times n$的λ-矩阵$A(\lambda)$可逆，则$A(\lambda)$的秩为n。但是，反之不然。

三　初等变换、初等矩阵、等价、标准形

1　初等变换

下列三种变换称为λ-矩阵$A(\lambda)$的初等变换：1）$A(\lambda)$的两行（列）互换位置；2）$A(\lambda)$的某一行（列）乘以非零的数c；3）$A(\lambda)$的某一行（列）的$\phi(\lambda)$倍加于另一行（列），$\phi(\lambda)$是一个λ的多项式。

采用下列记号：$A(\lambda)\xrightarrow{[i,j]}$表示交换$A(\lambda)$的第$i$行与第$j$行，$A(\lambda)\xrightarrow[{[i,j]}]{}$表示交换$A(\lambda)$的第$i$列与第$j$列，$\xrightarrow{[i(c)]}$表示$A(\lambda)$的第$i$行乘以非零常数$c$，$A(\lambda)\xrightarrow[{[i(c)]}]{}$表示$A(\lambda)$的第$i$列乘以非零常数$c$，$A(\lambda)\xrightarrow{[i+j(\phi)]}$表示第$j$行的$\phi(\lambda)$倍加于第$i$行，$A(\lambda)\xrightarrow[{[i+j(\phi)]}]{}$表示$A(\lambda)$的第$i$列的$\phi(\lambda)$倍加于第$j$列。

2　初等矩阵

下列三种λ-矩阵称为初等矩阵：1）交换E的第i，j行(列)得到$P(i,j)$；2)用非零常数c乘E的第i行(列)得到$P(i(c))$；3）E的第j行（i列）的$\phi(\lambda)$倍加于第i行（j列）得到$P(i,j(\phi))$。

初等矩阵都是可逆的，其逆矩阵也是初等矩阵，且$P(i,j)^{-1}=P(i,j)$，$P(i(c))^{-1}=P(i(c^{-1}))$，$P(i,j(\phi))^{-1}=P(i,j(-\phi))$。

$m\times n$的λ-矩阵$A(\lambda)$的初等行变换相当于左乘相应的$m\times m$初等矩阵，初等列变换相当于右乘相应的$n\times n$初等矩阵。从而，初等变换是可逆的。

3　等价

设$A(\lambda)$，$B(\lambda)$是两个$m\times n$的λ-矩阵。若可以经一系列初等变换将$A(\lambda)$化为$B(\lambda)$，则称$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价。

λ-矩阵的等价具有反身性、对称性、传递性。

$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价$\Leftrightarrow$存在一系列初等矩阵P_1，P_2，…，P_s，

Q_1, Q_2, …, Q_t, 使得$B(\lambda)=P_s\cdots P_2P_1A(\lambda)Q_1Q_2\cdots Q_t$.

4 标准形

若λ-矩阵$A(\lambda)$的左上角元素$a_{11}(\lambda)\neq 0$, $\deg(a_{11}(\lambda))>0$，并且$A(\lambda)$中至少有一个元素不能被它整除，则一定可以找到一个与$A(\lambda)$等价的矩阵$B(\lambda)$，使得$B(\lambda)$的左上角元素也不为零，但次数比$a_{11}(\lambda)$低.

任意一个非零的$m\times n$的λ-矩阵$A(\lambda)$都等价于如下形状的矩阵(*)：其(i, i)元素为$d_i(\lambda)$, $i=1, 2, \cdots, r$, $r\geqslant 1$，而其余元素均为零，并且$d_i(\lambda)$首项系数为1，$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots, r-1)$. (*)称为$A(\lambda)$的标准形(法对角型).零矩阵的标准形是零矩阵.于是，任意$m\times n$的λ-矩阵均存在标准形.

四 行列式因子、标准形唯一性

1 行列式因子

$A(\lambda)$的全部k阶子式的最大公因式$D_k(\lambda)$称为$A(\lambda)$的k阶行列式因子.

$m\times n$的λ-矩阵$A(\lambda)$的行列式因子的性质如下：1)当$1\leqslant k\leqslant \min(m, n)$时，$k$阶行列式因子存在且(不计常数因式)唯一；2) $D_t(\lambda)|D_{t+1}(\lambda)$；3) $D_k(\lambda)\neq 0\Leftrightarrow$至少有一个$k$阶子式不为零；4) $D_k(\lambda)=0\Leftrightarrow$所有$k$阶子式全为零；5) $A(\lambda)$的秩为$r\Leftrightarrow D_r(\lambda)\neq 0$且$D_{r+1}(\lambda)=\cdots=0$.

定理. 等价的λ-矩阵有相同的行列式因子. 等价的λ-矩阵有相同的秩.

2 标准形的唯一性

λ-矩阵(*)的各阶行列式因子是：$D_1(\lambda)=d_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)$, …, $D_r(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda)$, $D_{r+1}(\lambda)=\cdots=0$.

$A(\lambda)$的标准形中的$d_1(\lambda)$, $d_2(\lambda)$, …, $d_r(\lambda)$由$A(\lambda)$的行列式因子唯一决定.于是，任意$m\times n$的λ-矩阵的标准形是唯一的.

λ-矩阵$A(\lambda)$的秩及行列式因子可以按如下步骤求出：1）当$A(\lambda)\neq 0$时，用初等变换求得$A(\lambda)$的标准形；2）$A(\lambda)$的秩为r，行列式因子$D_1(\lambda)=d_1(\lambda)$，$D_2(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)$，…，$D_r(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda)$，$D_{r+1}(\lambda)=\cdots=0$；3）当$A(\lambda)=0$时，秩为零，行列式因子$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=\cdots=0$。

利用行列式因子的性质，可以证得：$n\times n$的λ-矩阵$A(\lambda)$可逆$\Leftrightarrow A(\lambda)$的各阶行列式因子均为1．于是$A(\lambda)$可逆的必要充分条件有如下五条：1）$|A(\lambda)|$等于非零常数；2）$A(\lambda)$的各阶行列式因子均为1；3）$A(\lambda)$的标准形是E；4）$A(\lambda)$与E等价；5）$A(\lambda)$是一些初等矩阵的乘积。

$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵$P(\lambda)$与$Q(\lambda)$，使得$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$。

Ⅱ　不变因子与初等因子

一　不变因子

非零λ-矩阵$A(\lambda)$的标准形中的非零元素$d_1(\lambda)$，$d_2(\lambda)$，…，$d_r(\lambda)$称为$A(\lambda)$的不变因子。

$A(\lambda)$的不变因子与其行列式因子相互唯一地决定。

$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价$\Leftrightarrow$它们有相同的不变因子$\Leftrightarrow$它们有相同的行列式因子。

求$A(\lambda)$的不变因子的问题也就是求$A(\lambda)$的标准形的问题。

二　初等因子

设$d_i(\lambda)\neq 1$是λ-矩阵$A(\lambda)$的一个不变因子．若$d_i(\lambda)=p_1^{k_1}(\lambda)p_2^{k_2}(\lambda)\cdots p_s^{k_s}(\lambda)$是数域F上的标准分解式，则称$p_1^{k_1}(\lambda)$，$p_2^{k_2}(\lambda)$，…，$p_s^{k_s}(\lambda)$是不变因子$d_i(\lambda)$的初等因子．$A(\lambda)$的所有不变因子的初等因子（相同的必须按出现的次数计算）作成的集合称为$A(\lambda)$的初等因子组。

同一个因式的方幂的初等因子在不变因子的分解式中出现的

位置是唯一确定的。

$A(\lambda)$的不变因子唯一地决定$A(\lambda)$的初等因子组；反之，$A(\lambda)$的秩与其初等因子组唯一地决定$A(\lambda)$的不变因子。

由$A(\lambda)$的秩r与$A(\lambda)$的初等因子组求$A(\lambda)$的不变因子的具体方法是：设$A(\lambda)$的初等因子组中出现的互异不可约因式为$p_1(\lambda)$，$p_2(\lambda)$，…，$p_w(\lambda)$，对于每一个$p_j(\lambda)$，将$p_j(\lambda)$的方幂的初等因子按降幂排列，当个数不足r时，用$p_j{}^0(\lambda)=1$补足到r个。设为

$$p_j{}^{k_{rj}}(\lambda),\ p_j{}^{k_{r-1,j}}(\lambda),\ \cdots,\ p_j{}^{k_{1j}}(\lambda),$$
$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ w),$$

则 $$d_i(\lambda)=p_1{}^{k_{i1}}(\lambda)\,p_2{}^{k_{i2}}(\lambda)\cdots p_w{}^{k_{iw}}(\lambda),\ (i=1,2,\cdots,r)$$

是$A(\lambda)$的不变因子。

$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价⇔它们有相同的秩与相同的初等因子组。于是，$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价的必要充分条件有如下六条：1）有初等矩阵$P_1(\lambda)$，…，$P_t(\lambda)$，$Q_1(\lambda)$，…，$Q_s(\lambda)$使$B(\lambda)$

$=P_t(\lambda)\cdots P_1(\lambda)A(\lambda)Q_1(\lambda)\cdots Q_s(\lambda)$；2）它们有相同的标准形；3)有可逆矩阵$P(\lambda)$,$Q(\lambda)$,使$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$；4)它们有相同的行列式因子；5）它们有相同的不变因子；6）它们有相同的秩与相同的初等因子组。

初等变换保持λ-矩阵的初等因子组不变。

若多项式$f_1(\lambda)$，$f_2(\lambda)$与$g_1(\lambda)$，$g_2(\lambda)$互素，则

$$(f_1(\lambda)g_1(\lambda),f_2(\lambda)g_2(\lambda))=(f_1(\lambda),f_2(\lambda))(g_1(\lambda),g_2(\lambda)).$$

设

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} f_1(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda)g_2(\lambda)\end{pmatrix},\ B(\lambda)=\begin{pmatrix} f_2(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)g_2(\lambda)\end{pmatrix}$$

若多项式$f_1(\lambda)$，$f_2(\lambda)$与$g_1(\lambda)$，$g_2(\lambda)$互素，则$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价。

于是，得到初等因子组的直接求法：用初等变换将$A(\lambda)$化为对角形，使$(1，1)，(2，2)，\cdots，(r，r)$元素不为零，而其余元素全为零；再将主对角线上的元素写为标准分解式，则所有这些不可约多项式的方幂（重复的按出现的次数计算）所组成的集合就是$A(\lambda)$的初等因子组.

若$A(\lambda)$是准对角形矩阵

$$A(\lambda)_{n\times n}=[A_1(\lambda)_{n_1\times n_1},A_2(\lambda)_{n_2\times n_2}，\cdots，A_s(\lambda)_{n_s\times n_s}]$$

则$A(\lambda)$的初等因子组就是所有$A_1(\lambda)，A_2(\lambda)，\cdots，A_s(\lambda)$的初等因子组所组成的集合（重复的按出现的次数计算）.

Ⅲ　矩阵相似的条件

讨论数字矩阵相似的条件.

n阶矩阵A的特征矩阵$\lambda E-A$，作为λ-矩阵，其秩为n.

对于任何不为零的n阶数字矩阵A和λ-矩阵$U(\lambda)$，$V(\lambda)$，一定存在λ-矩阵$Q(\lambda)$与$R(\lambda)$以及数字矩阵U_0和V_0，使

$$U(\lambda)=(\lambda E-A)Q(\lambda)+U_0,V(\lambda)=R(\lambda)(\lambda E-A)+V_0.$$

特征矩阵$\lambda E-A$与$\lambda E-B$等价$\Leftrightarrow$存在可逆数字矩阵R，S，使$\lambda E-A=R(\lambda E-B)S$.

$A\sim B\Leftrightarrow\lambda E-A$与$\lambda E-B$等价.

n阶数字矩阵A的特征矩阵$\lambda E-A$的不变因子、初等因子组称为A的不变因子、初等因子组.

$A\sim B\Leftrightarrow$它们有相同的不变因子$\Leftrightarrow$它们有相同的初等因子组.

不变因子、初等因子是矩阵的相似不变量，从而可以定义线性变换的不变因子、初等因子.

设n阶数字矩阵A的不变因子为$d_1(\lambda)，d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$，则$d_n(\lambda)$是A的极小多项式.

Ⅳ　若当标准形

若当块$J(\lambda_0，t)$的不变因子是$d_1(\lambda)=\cdots=d_{t-1}(\lambda)=1$，

$d_t(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^t$，初等因子是$(\lambda-\lambda_0)^t$。

复数矩阵A的初等因子是一次因式的方幂。设n阶矩阵A的初等因子组是$(\lambda-\lambda_1)^{k_1}, (\lambda-\lambda_2)^{k_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{k_s}$，$k_1+k_2+\cdots+k_s=n$，则A与一若当矩阵相似，除若当块的排列顺序外，由A唯一确定，s个若当块是$J(\lambda_1, k_1)$，$J(\lambda_2, k_2)$，…，$J(\lambda_s, k_s)$。〔$J(\lambda_1, k_1)$，$J(\lambda_2, k_2)$，…，$J(\lambda_s, k_s)$〕称为A的若当标准形。

复数矩阵A与对角矩阵相似⇔A的初等因子全是一次的。

若σ是复数域上的n维线性空间V的线性变换，则在V中存在一组基，使σ在该组基下的矩阵是若当形，并且，除去若当块的排列顺序外是被σ唯一确定的。

求A的若当标准形的步骤是：1）将$\lambda E-A$化为对角形，分解所得的多项式，求得全部初等因子；2）写出相应于各初等因子的若当块；3）写出若当标准形。

§3 重点难点

本章的主题词是：λ-矩阵，λ-矩阵的k阶子式，λ-矩阵的秩，λ-矩阵的初等变换，λ-矩阵的等价（相抵），λ-矩阵的标准形（法对角型），行列式因子；不变因子，初等因子；若当标准形（若当法式）。

本章的基本方法是：λ-矩阵的初等变换方法，λ-矩阵标准形的求法，λ-矩阵秩的求法，λ-矩阵等价判别法，λ-矩阵的逆矩阵求法，求不变因子法，求行列式因子法，求初等因子法，矩阵相似判别法，矩阵若当标准形求法。

本章的重点是：λ-矩阵的标准形，矩阵相似的条件，若当标准形。

λ-矩阵的标准形是λ-矩阵自身的最重要的研究内容，是研究行列式因子、不变因子、初等因子的基础，从而，是研究矩阵相

似、若当标准形的工具．总之，贯穿于全章的各个部分，因此，λ-矩阵的标准形，成为本章的一个重点．

以λ-矩阵为工具，进一步研究矩阵相似的问题，是本章的主要目的之一．将A与B的相似问题，转化为$\lambda E-A$与$\lambda E-B$的等价问题，不仅是重要的结果，而且是重要的方法，包含着深刻的数学思想．$A\sim B \Leftrightarrow \lambda E-A$与$\lambda E-B$等价，这是本章的中心定理．因此，矩阵相似的条件，成为本章的一个重点．

以λ-矩阵为工具，研究复数矩阵的相似问题，得到若当标准形的完美结果．从理论上解决若当标准形的推导问题，从实践上给出若当标准形的求法问题，也是本章的主要目的之一．因此，若当标准形，成为本章的一个重点．

本章的难点是：行列式因子，矩阵相似的条件，初等因子．

行列式因子是本章的一个难点，原因在于：1）行列式因子的概念用到子式概念及最大公因式概念；2）对于一般的λ-矩阵，用定义计算行列式因子，工作量很大，从而无法计算．解决困难的方法是：1)对于一些容易用定义计算行列式因子的λ-矩阵，如对角形、由若当块$J(\lambda_0, t)$得到的λ-矩阵$\lambda E-J(\lambda_0,t)$等，计算行列式因子；2）根据不变因子与行列式因子的关系，反过来认识行列式因子概念．

矩阵相似的条件，既是本章的一个重点，又是本章的一个难点，原因在于：1）要研究矩阵多项式；2）要研究λ-矩阵的综合除法；3）证明矩阵相似的条件，推导较为麻烦．解决困难的方法是：1）理解矩阵相似的条件的有关概念及总体结构；2）用多项式的有关理论作类比，并注意多项式的次数的作用；3）注意λ-矩阵可逆的条件．

初等因子是本章的一个难点，原因在于：1）初等因子的概念用到不变因子与多项式的标准分解式两个概念；2）重复出现的方幂按重数计算，对于这一点，不仅理解上有困难，而且在实

践上也往往不计重数而发生错误．解决困难的方法是：１）从不变因子与初等因子的关系入手，抓住关键来解决问题；２）通过实际例子，特别是对角形的例子，加深理解初等因子的概念．

§4　习题类解

Ⅰ　计算题

一　求λ-矩阵的标准形

求λ-矩阵的标准形的方法是：１）用初等变换的方法；２）利用行列式因子、不变因子、初等因子以及它们之间的关系．第一个方法是基本的，对任何情况均适用；第二个方法仅对于某些情况较方便，并且，也要配合以初等变换．

例 1　求λ-矩阵$A(\lambda)$的标准形，

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2\\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda\end{pmatrix}.$$

解 1　作初等变换求得

$$A(\lambda)\xrightarrow[(1,\ 2)]{(1,\ 2)}\begin{pmatrix}3\lambda & \lambda^2+5\lambda\\ 2\lambda^2 & \lambda^3-\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{(2(3))}\begin{pmatrix}3\lambda & \lambda^2+5\lambda\\ 6\lambda^2 & 3\lambda^3-3\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{(2+1(-2\lambda))}$$

$$\begin{pmatrix}3\lambda & \lambda^2+5\lambda\\ 0 & \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow[(2+1(-\frac{1}{3}(\lambda+5)))]{}\begin{pmatrix}3\lambda & 0\\ 0 & \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1(\frac{1}{3}))]{}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda\end{pmatrix}.$$

解 2　利用行列式因子与不变因子的关系求得，$D_1(\lambda)=\lambda$，$D_2(\lambda)=|A(\lambda)|=\lambda^4-10^3-3\lambda^2$，$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=\lambda$，$d_2(\lambda)=D_2(\lambda)/D_1(\lambda)=\lambda^3-10\lambda^2-3\lambda$，故$A(\lambda)$的标准形是

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda\end{pmatrix}.$$

例 2　求λ-矩阵$A(\lambda)$的标准形，

λ　λ(λ+1)　λ(λ+1)²

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^2+\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{pmatrix}.$$

解　$A(\lambda)$的初等因子是：λ, λ, $(\lambda+1)^2$, $\lambda+1$. 由初等因子与不变因子的关系求得，$A(\lambda)$的不变因子是：$d_3(\lambda)=\lambda(\lambda+1)^2$, $d_2(\lambda)=\lambda(\lambda+1)$, $d_1(\lambda)=1$. 故$A(\lambda)$的标准形是

$$\begin{pmatrix}1 & & \\ & \lambda(\lambda+1) & \\ & & \lambda(\lambda+1)^2\end{pmatrix}.$$

二　求λ-矩阵的不变因子、初等因子

求λ-矩阵的不变因子，方法有三个：1）用初等变换求，2）用行列式因子求，3）用初等因子求.

例 3　求λ-矩阵$\lambda E-J(\lambda_0, t)$的不变因子.

解　$|\lambda E-J(\lambda_0, t)|=(\lambda-\lambda_0)^t$，并且，有一个$t-1$阶子式为$(-1)^{t-1}$，所以$D_t(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^t$，$D_{t-1}(\lambda)=1$，因此，不变因子是：$d_1(\lambda)=\cdots=d_{t-1}(\lambda)=1$, $d_t(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^t$.

例 4　求λ-矩阵$A(\lambda)$的不变因子，

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}.$$

解　$A(\lambda)$的秩是4. $A(\lambda)$的初等因子是：$\lambda+1$, $\lambda+2$, $\lambda-1$, $\lambda-2$. 所以，$A(\lambda)$的不变因子是：$d_4(\lambda)=(\lambda^2-1)(\lambda^2-4)$, $d_3(\lambda)=d_2(\lambda)=d_1(\lambda)=1$.

求λ-矩阵的初等因子，方法有两个：1）用不变因子求；2）用初等变换将λ-矩阵化为对角形，而后由定理直接求.

例 5　求$A(\lambda)$的初等因子组，

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & \lambda^3(\lambda-2)^3 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(\lambda-2)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \end{pmatrix}$$

解 $A(\lambda)\xrightarrow[\{1,\ 2\}]{}(\cdots)\xrightarrow[\{4,\ 5\}]{}(\cdots)\xrightarrow[\{3,\ 4\}]{}$

$$\begin{pmatrix} \lambda^3(\lambda-2)^3 & & & & \\ & \lambda(\lambda-2)^2 & & & \\ & & \lambda-2 & & \\ & & & \lambda(\lambda+1) & \\ & & & & \lambda-2 \end{pmatrix},$$

故$A(\lambda)$的初等因子是：λ，λ，λ^3，$\lambda+1,\lambda-2,\lambda-2,(\lambda-2)^2$，$(\lambda-2)^3$.

三　求λ-矩阵的行列式因子

求λ-矩阵的行列式因子，方法有两个：1）由不变因子求，2）直接计算子式并求最大公因式.

例 6　求$A(\lambda)$的行列式因子，

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解　$A(\lambda)$的行列式是$(\lambda+2)^4$，$A(\lambda)$有一个三阶子式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \\ 1 & \lambda+2 & 0 \end{vmatrix}=-1,$$

所以$A(\lambda)$的行列式因子是：$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=D_3(\lambda)=1$，$D_4(\lambda)=(\lambda+2)^4$.

四　求λ-矩阵的秩、逆矩阵

求λ-矩阵的秩，方法有三个：1）计算子式，2）化标准形，3）由不变因子求。

例7 求$A(\lambda)$的秩，

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 2\lambda+1 & 1\\ 1 & \lambda+1 & \lambda^2+1\\ \lambda-1 & \lambda & -\lambda^2\end{pmatrix}.$$

解 $|A(\lambda)|=0$，但有二阶子式

$$\begin{vmatrix}1 & \lambda+1\\ \lambda-1 & \lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2+\lambda+1\neq 0,$$

所以，$A(\lambda)$的秩为2。

求$A(\lambda)$的逆矩阵的方法是：先计算$|A(\lambda)|$，再计算$A(\lambda)$的$n-1$阶子式，从而$A(\lambda)^{-1}=|A(\lambda)|^{-1}A(\lambda)^*$。

例8 试问$A(\lambda)$是否可逆？若可逆，试求其逆矩阵。

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & \lambda & 0\\ 2 & \lambda & 1\\ \lambda^2+1 & 2 & \lambda^2+1\end{pmatrix}.$$

解 $|A(\lambda)|=-2\neq 0$，所以，$A(\lambda)$可逆，且

$$A(\lambda)^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda^3+\lambda-2 & -\lambda^3-\lambda & \lambda\\ -\lambda^2-1 & \lambda^2+1 & -1\\ -\lambda^3-\lambda+1 & \lambda^3+\lambda-2 & -\lambda\end{pmatrix}.$$

五 判断矩阵相似

方法：判断两个矩阵是否相似，就是要判断它们的特征矩阵是否等价。

例6 判断下列矩阵哪些相似？哪些不相似？

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

解 $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$

的初等因子为：$\lambda-2$，$(\lambda-1)^2$；

$$\lambda E-B=\begin{pmatrix}\lambda-3 & 0 & -8\\ -3 & \lambda+1 & -6\\ 2 & 0 & \lambda+5\end{pmatrix}$$

的初等因子为：$\lambda+1$，$(\lambda+1)^2$；

$$\lambda E-C=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}$$

的初等因子为：$\lambda-2$，$(\lambda-1)^2$.

所以，$A\sim C$，但A与B，B与C均不相似.

六　求若当标准形

方法：§2，Ⅳ，中所述的三个步骤.

例10　求矩阵A的若当标准形，

$$A=\begin{pmatrix}13 & 16 & 16\\ -5 & -7 & -6\\ -6 & -8 & -7\end{pmatrix}.$$

解 $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-13 & -16 & -16\\ 5 & \lambda+7 & 6\\ 6 & 8 & \lambda+7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)^2(\lambda+3)\end{pmatrix}$，

初等因子为：$(\lambda-1)^2$，$\lambda+3$，所以A的若当标准形为

$$\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Ⅰ　证明题

一　λ-矩阵的标准形

利用初等变换化得标准形，或者求得不变因子，进而得到标准形。

例 1 证明：若$(f(\lambda),g(\lambda))=1$，则

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}\text{等价.}$$

证明 1 因为$(f(\lambda),g(\lambda))=1$，所以存在多项式$u(\lambda)$，$v(x)$，使$f(\lambda)u(\lambda)+g(\lambda)v(\lambda)=1$．作初等变换

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(\lambda) & f(\lambda)u(\lambda) \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(\lambda) & f(\lambda)u(\lambda)+g(\lambda)v(\lambda) \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} f(\lambda) & 1 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f(\lambda)g(\lambda) & g(\lambda) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}.$$

证明 2 因为$(f(\lambda),g(\lambda))=1$，所以$D_1(\lambda)=1$．又，$D_2(\lambda)=f(\lambda)g(\lambda)$．根据行列式因子与不变因子的关系，得到标准形 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}$.

二 行列式因子、不变因子、初等因子

根据行列式因子、不变因子、初等因子的定义及其相互关系，进行证明。

例 2 证明：n阶矩阵A是一个数量矩阵$\Leftrightarrow \lambda E-A$的$n-1$阶行列式因子$D_{n-1}(\lambda)$是$n-1$次的$(n>1)$．

证明 $\Rightarrow$．设A是一个数量矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}, \quad \text{则} \quad \lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda-a & & & \\ & \lambda-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda-a \end{pmatrix}.$$

于是，$D_{n-1}(\lambda)=(\lambda-a)^{n-1}$是$n-1$次的．

$\Leftarrow$．设$d_1(\lambda)$，$d_2(\lambda)$，…，$d_n(\lambda)$是$\lambda E-A$的不变因子，则由不变因子与行列式因子的关系得到 $D_n(\lambda)=d_1(\lambda)\cdots d_{n-1}(\lambda)d_n(\lambda)=D_{n-1}(\lambda)d_n(\lambda)$．由于$D_{n-1}(\lambda)$是$n-1$次的，

所以$d_n(\lambda)$是一次的。设$d_n(\lambda)=\lambda-a$，则由 $d_j(\lambda)|d_{j+1}(\lambda)$，$j=1, 2, \cdots, n-1$， 得到 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=\lambda-a$。从而，$\lambda E-A$就与

$$\begin{pmatrix} \lambda-a & & & \\ & \lambda-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda-a \end{pmatrix}=\lambda E-aE$$

等价，所以$A\sim aE$。因此$A=aE$。

例 3 设$d_1(\lambda)$，$d_2(\lambda)$，$\cdots$，$d_n(\lambda)$是A的特征矩阵$\lambda E-A$的不变因子，而$p_1^{k_1}(\lambda)$，$p_2^{k_2}(\lambda)$，$\cdots$，$p_s^{k_s}(\lambda)$为其在数域F上的全部初等因子。证明：

$$d_n(\lambda)=[p_1^{k_1}(\lambda), p_2^{k_2}(\lambda), \cdots, p_s^{k_s}(\lambda)]。$$

证明 因为 $d_i(\lambda)|d_n(\lambda)$，$i=1, 2, \cdots, n$，而每个初等因子必为某个不变因子的因子，所以 $p_i^{k_i}(\lambda)|d_n(\lambda)$，$i=1, 2, \cdots, s$。从而 $[p_1^{k_1}(\lambda), p_2^{k_2}(\lambda), \cdots, p_s^{k_s}(\lambda)]|d_n(\lambda)$。设 $d_n(\lambda)=q_1^{l_1}(\lambda)q_2^{l_2}(\lambda)\cdots q_t^{l_t}(\lambda)$ 是 $d_n(\lambda)$ 在数域F上的标准分解式，则 $q_i^{l_i}(\lambda)$必是$p_1^{k_1}(\lambda)$，$p_2^{k_2}(\lambda)$，$\cdots$，$p_s^{k_s}(\lambda)$中的一个，所以$q_i^{l_i}(\lambda)|[p_1^{k_1}(\lambda), p_2^{k_2}(\lambda), \cdots, p_s^{k_s}(\lambda)]$，$i=1, 2, \cdots, t$，再由$q_1^{l_1}(\lambda)$，$q_2^{l_2}(\lambda)$，$\cdots$，$q_t^{t_t}(\lambda)$两两互素得

$$q_1^{l_1}(\lambda)q_2^{l_2}(\lambda)\cdots q_t^{l_t}(\lambda)|[p_1^{k_1}(\lambda), p_2^{k_2}(\lambda), \cdots, p_s^{k_s}(\lambda)]。$$

因此，$d_n(\lambda)=[p_1^{k_1}(\lambda), p_2^{k_2}(\lambda), \cdots, p_s^{k_s}(\lambda)]$。

例 4 设有n阶准对角λ-矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} B(\lambda) & 0 \\ 0 & C(\lambda) \end{pmatrix}.$$

证明：若$B(\lambda)$的任一不变因子都是$C(\lambda)$的所有不变因子的因式，则$B(\lambda)$，$C(\lambda)$的全部不变因子就是$A(\lambda)$的不变因子。

证明 设$[b_1(\lambda), \cdots, b_s(\lambda), 0, \cdots, 0]$

是$B(\lambda)$的标准形，$b_1(\lambda)$，…，$b_s(\lambda)$是$B(\lambda)$的不变因子；
$\{c_1(x)$，…，$c_t(\lambda)$，0，…，0$\}$是$C(\lambda)$的标准形，$c_1(\lambda)$，…，$c_t(\lambda)$是$C(\lambda)$的不变因子．对$B(\lambda)$作初等变换时，$C(\lambda)$不受影响；同样对$C(\lambda)$作初等变换时，$B(\lambda)$不受影响．由已知条件，$b_k(\lambda)|c_h(\lambda)$，所以

$$\{b_1(\lambda), \cdots, b_s(\lambda), c_1(\lambda), \cdots, c_t(\lambda), 0, \cdots, 0\}$$

是$A(\lambda)$的标准形．因此，$b_1(\lambda)$，…，$b_s(\lambda)$，$c_1(\lambda)$，…，$c_t(\lambda)$是$A(\lambda)$的不变因子．

例5 设A，B，A_1，B_1是n阶矩阵，A，A_1是可逆的，证明：存在可逆矩阵P，Q，使$A_1=PAQ$，$B_1=PBQ$的必要充分条件是，λ-矩阵$\lambda A-B$与λA_1-B_1有相同的不变因子．

证明 先证必要性．由于$A_1=PAQ$，$B_1=PBQ$，所以，$\lambda A_1-B_1=P(\lambda A-B)Q$．又由于$P$，$Q$是可逆的，所以$\lambda A_1-B_1$与$\lambda A-B$等价，从而它们有相同的不变因子．

再证充分性．由于$\lambda A-B$与λA_1-B_1有相同的不变因子，A_1，A是可逆的，且 $A^{-1}(\lambda A-B)=\lambda E-A^{-1}B$，$A_1^{-1}(\lambda A_1-B_1)=\lambda E-A_1^{-1}B_1$，所以$A^{-1}(\lambda A-B)$与$A_1^{-1}(\lambda A_1-B_1)$，即$\lambda E-A^{-1}B$与$\lambda E-A_1^{-1}B_1$等价，从而，$A^{-1}B$与$A_1^{-1}B_1$相似．于是有可逆矩阵$Q$，使$A_1^{-1}B_1=Q^{-1}(A^{-1}B)Q$．因此，$\lambda A_1-B_1=\lambda A_1-A_1(A_1^{-1}B_1)=\lambda A_1-A_1Q^{-1}(A^{-1}B)Q=\lambda(A_1Q^{-1}A^{-1})AQ-(A_1Q^{-1}A^{-1})BQ$
比较两端，得$A_1=PAQ$，$B_1=PBQ$，其中，$P=A_1Q^{-1}A^{-1}$．

三 矩阵相似

根据本章所给的矩阵相似的条件进行证明．

例6 证明下列三个矩阵彼此相似($b\neq 0$，$c\neq 0$)：

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & \\ 1 & \lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & \\ b & \lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b & \lambda_0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}\lambda_0 & c & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & c \\ & & & \lambda_0\end{pmatrix}.$$

证明 对于$\lambda E-A$，n阶子式为$(\lambda-\lambda_0)^n$，有一个$n-1$阶子式为$(-1)^{n-1}$；对于$\lambda E-B$，n阶子式为$(\lambda-\lambda_0)^n$，有一个$n-1$阶子式为$(-b)^{n-1}$；对于$\lambda E-C$，n阶子式为$(\lambda-\lambda_0)^n$，有一个$n-1$阶子式为$(-c)^{n-1}$。从而，它们有相同的不变因子1，…，1，$(\lambda-\lambda_0)^n$。因此它们彼此相似。

例7 证明：若矩阵A的特征多项式是$(\lambda-1)^n$，则对于任意的自然数k，A^k与A均相似。

证明 设 $$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} J(1, t_1) & & & \\ & J(1, t_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(1, t_s) \end{pmatrix}$$

是A的若当标准形，$J(1, t_i)$是t_i阶若当块，则有

$$T^{-1}A^kT=\begin{pmatrix} J(1, t_1)^k & & & \\ & J(1, t_2)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(1, t_s^k) \end{pmatrix}.$$

考虑$J(1, t_i)^k$的初等因子，$J(1, t_i)^k$的特征矩阵是

$$\lambda E_{t_i}-J(1, t_i)^k=\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k & \lambda-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & -k & \lambda-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & * & \cdots & -k & \lambda-1 \end{pmatrix}.$$

其t_i阶子式为$(\lambda-1)^{t_i}$，从而t_i阶行列式因子为$(\lambda-1)^{t_i}$. 它有两个t_i-1阶子式分别为

$$\psi(\lambda)=(\lambda-1)^{t_i-1}, \phi(\lambda)=\begin{vmatrix} -k & \lambda-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & -k & \lambda-1 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & -k & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & * & \cdots & -k & \lambda-1 \\ * & * & * & \cdots & * & -k \end{vmatrix},$$

显然$\phi(1)\neq 0$，从而$(\phi(\lambda), \lambda-1)=1$，$t_i-1$阶行列式因子为1，因此，$\lambda E_{t_i}-J(1, t_i)^k$的不变因子组是1，…，1，

$(\lambda-\lambda_0)^{l_i}$，$\lambda E-T^{-1}AT$与$\lambda E-T^{-1}A^kT$等价，$T^{-1}AT$与$T^{-1}A^kT$相似，A与$A^k$相似。

四　若当标准形

利用矩阵的若当标准形的理论、矩阵运算以及特征值等，进行证明。

例8　证明：矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix} \quad (a_2\neq 0)$$

的若当标准形是

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 \end{pmatrix}$$

证明　$$\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda-a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 0 & \lambda-a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda-a_1 \end{pmatrix}$$

所以，$D_n(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-a_1)^n$。

下边求$D_{n-1}(\lambda)$。在$\lambda E-A$中去掉第一行与第一列得到的$n-1$阶子式$f_1(\lambda)=(\lambda-a_1)^{n-1}$；而去掉第$n$行与第一列得到的$n-1$阶子式

$$f_2(\lambda)=\begin{vmatrix} -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ \lambda-a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \\ 0 & \lambda-a_1 & \cdots & -a_{n-3} & -a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_2 & -a_3 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-a_1 & -a_2 \end{vmatrix}.$$

而$f_2(a_1)=(-a_2)^{n-1}\neq 0$，所以$f_2(\lambda)$不含因子$\lambda-a_1$，从而$(f_1(\lambda), f_2(\lambda))=1$，因此$D_{n-1}(\lambda)=1$，进而$\lambda E-A$的不变因子是1，1，…，1，$(\lambda-a_1)^n$，初等因子是$(\lambda-a_1)^n$，从而A的若当标准形是

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

例 9 证明：n阶矩阵A的特征值全是零⇔存在自然数m，使$A^m=0$.

证明 将n阶矩阵A看作复数域上的矩阵来考察，从而A有若当标准形$J=[J_1, J_2, \cdots, J_s]$，且$X^{-1}AX=J$.

⇒. 由于A的特征值全是零，所以A的若当标准形J中的若当块只能是 $J_i=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

取整数$m\geqslant$所有J_i的阶数，则由矩阵的乘法易算得$J_i^m=0$，从而$J^m=0$，所以$A^m=XJ^mX^{-1}=0$.

⇐. 由于$A^m=0$，所以$J^m=0$，从而$J_i^m=0$. 而$J_i=J(\lambda_i, t_i)$，J_i^m的主对角线元素为$\lambda_i^m, \lambda_i^m, \cdots, \lambda_i^m$. 因此，$\lambda_i^m=0$，得$\lambda_i=0$，$i=1, 2, \cdots, s$，即A的特征值全是零.

例10 证明：若A是数域**F**上的n阶矩阵，且$A^2=A$，则A相似于对角形矩阵$C=[1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0]$.

证明 将n阶矩阵A看作复数域上的矩阵来考察，则A有若当标准形

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},\quad J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

即，有可逆复数矩阵X，使$XAX^{-1}=J$。

由于$A^2=A$，所以$J^2=(XAX^{-1})^2=XA^2X^{-1}=XAX^{-1}=J$

从而$J^2=J$，$J_i^2=J_i$，$i=1, 2, \cdots, s$，即

$$\begin{pmatrix} \lambda_i^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2\lambda_i & \lambda^2_i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\lambda_i & \lambda_i^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\lambda_i & \lambda_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

所以，当且仅当J_i为1阶时上式成立，且$\lambda_i^2=\lambda_i$，从而$\lambda_i=1$或$\lambda_i=0$。因此，J为一对角形矩阵，且主对角线上元素只能是1或0，从而，在数域**F**上，A相似于C。

说明 将数域**F**上的矩阵看作复数域上的矩阵来考察，是一种重要的思考方法。

§5 补充资料

I λ-矩阵的除法

文字λ的矩阵系数多项式是指下面形状的表示式 $F(\lambda)=A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\cdots+A_m$，其中$A_0$，$A_1$，…，$A_m$是数域F上的同阶矩阵。

每一个λ的矩阵系数多项式都可以写成一个矩阵的形状，其元素是λ的数字系数多项式，且反之亦然。所以，λ的矩阵系数多项式只是λ-矩阵的一种特殊写法。

在λ的矩阵系数多项式中，若矩阵$A_0\neq 0$，则称$F(\lambda)$是m次多项式；若A_0可逆，则称$F(\lambda)$是正则多项式。λ的矩阵系数多项式的和的次数不能高于其各被加式的次数的最大数。两个λ的矩阵系数多项式相乘，若其中至少有一个是正则的，则乘积的次数恰好等于因子次数的和。

对于任何λ的矩阵系数多项式$A(\lambda)$和正则多项式$B(\lambda)$，有λ的矩阵系数多项式$P(\lambda)$，$S(\lambda)$，$Q(\lambda)$，$R(\lambda)$存在，且适合下列条件：

$$A(\lambda)=B(\lambda)P(\lambda)+S(\lambda),\quad A(\lambda)=Q(\lambda)B(\lambda)+R(\lambda),$$

其中$S(\lambda)=0$或$S(\lambda)$的次数小于$B(\lambda)$的次数；$R(\lambda)=0$或$R(\lambda)$的次数小于$B(\lambda)$的次数，并且，所确定的多项式对是唯一的。$P(\lambda)$，$S(\lambda)$称为用$B(\lambda)$除$A(\lambda)$所得的左商和左余，$Q(\lambda)$，$R(\lambda)$称为右商和右余。

Ⅰ Frobenius标准形

下面的m阶矩阵F称为属于$d(\lambda)=\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m$的Frobenius块

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_m \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{m-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

设F_1，F_2，…，F_s是Frobenius块，则称$F=[F_1, F_2, \cdots, F_s]$是Frobenius形矩阵。

数域**F**上的任意n阶矩阵A必相似于**F**上的一个Frobenius形矩阵F。称F是A的Frobenius标准形，或有理标准形，或自然标准形。

实际上，设$\lambda E-A$有s个不变因子$d_1(\lambda)$，$d_2(\lambda)$，…，$d_s(\lambda)$，它们的次数均$\geqslant 1$，则$F=[F_1, F_2, \cdots, F_s]$就是A的Frobenius标准形，其中$F_i$属于$d_i(\lambda)$，除块的顺序外是唯一的。

Ⅱ Jacobson标准形

设$p(\lambda)=\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m$是数域**F**上的不可约多项式，F是属于$p(\lambda)$的Frobenius块，N是$m$阶矩阵（除右上角为1外，其余元素均为零）

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ 则ms阶矩阵$D=\begin{pmatrix} F & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ N & F & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & N & F & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N & F \end{pmatrix}$

称为属于$(p(\lambda))^s$的Jacobson块，其中有s个F、$s-1$个N。

设D_1，D_2，…，D_t是Jacobson块，则称$\tilde{J}=(D_1, D_2, \cdots, D_t)$是Jacobson形矩阵，或第一广义若当形矩阵。

数域**F**上的任意n阶矩阵A必相似于**F**上的一个Jacobson形矩阵$\tilde{J}$。称$\tilde{J}$是A的Jacobson标准形，或第一广义若当标准形。

实际上，设$\lambda E-A$有t个初等因子$p_1^{s_1}(\lambda)$，$p_2^{s_2}(\lambda)$，…，$p_t^{s_t}(\lambda)$，D_i是属于$p_i^{s_i}(\lambda)$的Jacobson块，则$\tilde{J}=(D_1, D_2, \cdots, D_t)$就是A的Jacobson标准形。

当所有的$p_i(\lambda)$均为一次时，Jacobson标准形就变为Jordan标准形，"广义"的涵义就在于此。

如上，作

$$H=\begin{pmatrix} F & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ E & F & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E & F \end{pmatrix}$$

为属于$(p(\lambda))^s$的块，则得到第二广义Jordan标准形$\tilde{\tilde{J}}=(H_1, H_2, \cdots, H_t)$。

Ⅳ　历史资料点滴

西勒维斯特在1851年研究二次曲线和二次曲面的切触和相交时，需要考虑这种二次曲线和二次曲面束的分类，而他的分类方法引进了初等因子的概念。给定二次型A和B，考察二次型束$A+\lambda B$的行列式$|A+\lambda B|$，这是一个以λ的多项式为元素的行列式。西勒维斯证明，若$|A+\lambda B|$的任一阶的全部子式有一个公共因子$\lambda+\varepsilon$，则当A和B通过变量的同一个线性变换后，这个因子是同样子式的公因子。

西勒维斯特和魏尔斯特拉斯在行列式研究中建立的不变因子和初等因子概念，于1878年被弗罗宾纽斯引进矩阵论。弗罗宾纽斯在对不变因子做了进一步研究后，以合乎逻辑的形式整理了不变因子和初等因子的理论。

把矩阵化为标准形的问题是若当解决的。若当在1870年的文章中证明，对于任一矩阵，均可找到一个可逆矩阵T，使得$T^{-1}AT$成为A的若当标准形。

§6 基本习题

1 化 $\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$ 为标准形。

2 求$A(\lambda)$的各阶行列式因子

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3 求$A(\lambda)$的不变因子

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}.$$

4 求下列λ-矩阵的初等因子与标准形

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda^2-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda(\lambda+1) & & \\ & \lambda & \\ & & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}.$$

5 设$A(\lambda)$是5阶矩阵。若$A(\lambda)$的秩是4，初等因子是λ，λ^2，$\lambda-1$，$\lambda-1$，$\lambda+1$，$(\lambda+1)^2$，$(\lambda+1)^3$，试求$A(\lambda)$的标准形。

6 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$是否相似？

7 求 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ 的若当标准形。

8 证明

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n\\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}\\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1\end{pmatrix}$$

的不变因子是1,1,…,1 ,$f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$。

9 设A是数域F上的n阶矩阵，证明$A\sim A'$。

10 设有n阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \varepsilon & & & \\ & & \varepsilon^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \varepsilon^{n-1}\end{pmatrix}$$

其中ε是n次单位根，且$\varepsilon^{n-1}\neq 1$。证明：J是A的若当标准形。

第九章　欧几里得空间

§1　概括说明

在线性空间中，向量之间的关系表现为加法与数量乘法，统称为线性运算．我们对于线性空间自身的研究，以及对于线性变换、矩阵的研究，都是基于线性运算，并且，仅仅要求线性运算满足八条公理．

众所周知，三维几何空间是一般线性空间的一个具体模型，关于线性空间的概念是从三维几何空间抽象而来的．而且，在这个抽象化过程中，舍弃了三维几何空间向量的许多重要的几何性质．例如，三维几何空间中向量的长度、夹角等与度量有关的性质，在一般的线性空间中没有研究．然而，向量的长度、夹角等度量概念不仅在理论上，而且在实际上都是有重要意义的．本章进一步充实线性空间的概念，把有关的度量概念添到线性空间中去，从而建立欧几里得空间的概念，并且，研究由此而引起的一些理论．

在解析几何中，向量的长度和夹角等度量概念是由向量的内积(称为点乘积或数量积)来刻划的，而且，我们还发现，内积具有明显的代数性质，即适合一些通常的运算定律．于是，我们将内积作为基本概念，推广到一般的线性空间中去．

所谓欧几里得空间，就是一种引进了内积的实数域上的线性空间，简称为欧氏空间．

欧氏空间的理论对于解析几何的研究有指导意义，在泛函分析、多元分析中有广泛应用．而且，下面我们就将看到，内积概

念对于代数学自身，例如对于对称矩阵的研究等，也有直接的意义。

本章的内容分为六个部分：欧氏空间的基本概念，标准正交基与正交矩阵，正交变换，正交补、正射影、最小平方偏差，对称变换与实对称矩阵，酉空间。

欧氏空间的基本概念首先是向量的内积，而后，用内积来定义向量的长度、向量间的夹角、向量间的距离、向量正交等概念。

与线性空间的理论一样，我们主要讨论有限维欧氏空间。解析几何中直角坐标系的实际背景，启发我们建立标准正交基的概念。我们将证明标准正交基的存在性，给出标准正交基的求法，讨论两个标准正交基之间的关系，引入正交矩阵的概念。标准正交基的意义在于，在标准正交基之下，向量的坐标、内积、长度、距离都有简单的表达式。并且，利用标准正交基给出，两个有限维欧氏空间同构的必要充分条件是它们的维数相等。

在欧氏空间中，将线性变换与内积结合起来，得到正交变换的概念。这是解析几何中保持长度不变的变换的推广。

欧氏空间V的线性子空间W对于V的内积也作成一个欧氏空间。从而，可以讨论欧氏空间的子空间的正交关系，建立正交补的概念，进一步建立正射影的概念，研究最小平方偏差问题。

欧氏空间的另一类重要的线性变换是对称变换。对称变换的理论是泛函分析的一个重要内容。我们研究有限维欧氏空间的对称变换的性质，并且得到实对称矩阵正交相似于对角形的结论，对实二次型的化简再给出新的方法及结果。

在复线性空间中引进内积，得到酉空间。类似于欧氏空间，有一套相应的结论。

本章的补充资料是：格兰姆矩阵、广义阿达马不等式，共轭变换、正规变换，一般变换的分解，历史资料点滴。

§2 内容提要

I 欧氏空间的基本概念

一 定义与简单性质

设V是实数域**R**上的线性空间，对于V中任意两个向量α与β，有唯一确定的实数，记为(α,β)，与之对应。若(α,β)满足：1）$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$；2）$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$；3）$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$；4）$(\alpha,\alpha)\geqslant 0$，而等号成立当且仅当$\alpha=0$；其中$\alpha$，$\beta$，$\gamma$是V中任意向量，$k$是**R**中任意数，则称$(\alpha,\beta)$是$\alpha$与$\beta$的内积，称在V上定义了一个内积。

若实数域**R**上的线性空间V中定义了一个内积，则称V是 欧儿里得空间，简称为欧氏空间。

在线性空间$\mathbf{R}^n$中，对于向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，定义$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，则这是$\mathbf{R}^n$ 的一个内积，从而$\mathbf{R}^n$作成欧氏空间。称这种内积为 通 常意义下的内积。

$C[a,b]$是$[a,b]$上一切实连续函数作成的线性空 间， 对 于$f(x),g(x)\in C[a,b]$，定义 $(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)g(x)dx$，则这是$C[a,b]$的一个内积，从而$C[a,b]$作成欧氏空间。

欧氏空间V的内积有下列简单性质：

1）$(0,\alpha)=0$，$\forall\alpha\in V$；

2）$(\alpha,k\beta)=k(\alpha,\beta)$，$\forall\alpha,\beta\in V$，$\forall k\in\mathbf{R}$；

3）$(\alpha,\beta+\gamma)=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$，$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V$；

4）$$\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\alpha_i,\ \sum_{j=1}^{n}b_j\beta_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j(\alpha_i,\beta_j),$$

$\forall\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\in V$，

$\forall a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbf{R}$.

二 长度与夹角

设α是欧氏空间V的一个向量，非负实数（α,α）的算术平方根$\sqrt{(\alpha,\alpha)}$称为α的长度（模），记作$|\alpha|$. 长度为1的向量称为单位向量.

向量的长度有下列性质：1）长度$|\alpha|$是存在且唯一的；2）$|\alpha|\geqslant 0$，$|\alpha|=0\Leftrightarrow\alpha=0$；3）$|k\alpha|=|k||\alpha|$，对任意$\alpha\in V$，任意$k\in\mathbf{R}$；4）若$\alpha\neq 0$，则$|\alpha|^{-1}\alpha$是单位向量，称为将$\alpha$单位化。

定理（柯西-布涅柯夫斯基）. 对于欧氏空间V中的任意向量α,β，成立不等式$|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha||\beta|$，当且仅当$\alpha,\beta$线性相关时，等号成立.

由定理得到下面两个著名的不等式：

1）$|a_1b_1+\cdots+a_nb_n|\leqslant\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}$，
$\forall a_1,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbf{R}$；

2）$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$，
$\forall f(x)$，$g(x)\in C[a,b]$.

对于欧氏空间V中的任意两个向量α与β，成立所谓三角不等式：$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$，$|\alpha-\beta|\geqslant||\alpha|-|\beta||$.

欧氏空间V中的两个非零向量α，β的夹角$\langle\alpha,\beta\rangle$规定为

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}.$$

夹角具有如下性质：1）$\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$时，$\langle\alpha,\beta\rangle$存在且唯一，2）$0\leqslant\langle\alpha,\beta\rangle\leqslant\pi$；3）$\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$；4）若$\alpha\neq 0$，则$\alpha$与$|\alpha|^{-1}\alpha$“同方向”，即$\langle\alpha,|\alpha|^{-1}\alpha\rangle=0$.

三 距离

设α，β是欧氏空间V的向量. α，β之间的距离指的是向量$(\alpha-\beta)$的长度，记作$d(\alpha,\beta)$. 即，$d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$.

距离具有下列性质：1）$d(\alpha,\beta)\geqslant 0$，$d(\alpha,\beta)=0\Leftrightarrow\alpha=\beta$；

2）$d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$；3）$d(\alpha,\beta)\leqslant d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta)$。

四　正交

设α，β是欧氏空间V中的向量。若$(\alpha,\beta)=0$，则称α，β正交或相互垂直，记作$\alpha\perp\beta$。

正交具有下列简单性质：1）当$\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$时，$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\langle\alpha,\beta\rangle=\frac{\pi}{2}$；2）$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\beta\perp\alpha$；3)零向量与任意向量正交；4)$\alpha\perp\alpha\Leftrightarrow\alpha=0$；5）若$\alpha$与$\beta_1$，$\beta_2,\cdots,\beta_s$均正交，则$\alpha$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$的任一线性组合正交；6）若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 2)$两两正交，则对于任意的$k_1,k_2,\cdots,k_s\in\mathbf{R}$，$k_1\alpha_1,k_2\alpha_2,\cdots,k_s\alpha_s$两两正交。

若α,β正交，则$|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$。若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$两两正交，则$|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s|^2=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\cdots+|\alpha_s|^2$。

设有欧氏空间V的一组非零向量。若向量个数$\geqslant 2$，且两两正交，则称为正交向量组；若向量个数$=1$，则也称为正交向量组。

正交向量组是线性无关的。

Ⅱ　标准正交基与正交矩阵

一　度量矩阵

设V是$n(n>0)$维欧氏空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是V的一组基。对于任意$\alpha,\beta\in V$，有$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$，$\beta=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\cdots+y_n\alpha_n$，从而

$$(\alpha,\ \beta)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i,\ \sum_{j=1}^{n}y_j\alpha_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(\alpha_i,\alpha_j).$$

因此，内积完全由一组基向量的内积所决定。

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$n$维欧氏空间V的一组基。若记$a_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)$，则$n$阶矩阵$A=(a_{ij})$称为基$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots$，$\alpha_n$的度量矩阵。

若A是基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的度量矩阵，向量$\alpha,\beta$在该基下的坐标分别是　$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$Y=(y_1,\ y_2,\cdots,\ y_n)$，则有

$(\alpha,\beta)=XAY'$，$|\alpha|=\sqrt{XAX'}$.

度量矩阵有如下性质：1）度量矩阵是正定矩阵；2）不同基的度量矩阵是合同的；3）内积由度量矩阵完全决定；4）对于不同基的度量矩阵，所确定的内积(α,β)是相等的。

取定$n(n>0)$维欧氏空间V的一组基之后，对于V的每一个内积都有唯一确定的正定矩阵A与之对应，A就是该组基的度量矩阵；反之，任给一个正定矩阵$A=(a_{ij})$，对于任意的$\alpha,\beta\in V$，定义$(\alpha,\beta)=XAY'$，其中X，Y分别为α，β在该基下的行坐标，则这是V的一个内积，由A唯一确定。因此，在这种意义下，就建立了欧氏空间V的内积集合与正定矩阵集合之间的一个双射，即一一对应.从而，同一个实线性空间可以定义无穷多个内积。

二　标准正交基

若一组基中的向量有正交的，则计算内积将会简单些，从而促使我们寻找一种特殊的基，称为标准正交基。因为正交向量是线性无关的，所以，$n(n>0)$维欧氏空间中两两正交的向量的个数至多是n，从而，建立标准正交基是可以实现的。

欧氏空间V中，由单位向量组成的正交组称为标准正交组.由正交组构成的基称为正交基.由标准正交组构成的基称为标准正交基。

设V是$n(n>0)$维欧氏空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是V的一组基，任意$\alpha,\beta\in V$，$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$，$\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n$，则下列诸条相互等价：1）$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是V的一组标准正交基；2）当$i=j$时，$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=1$，当$i\neq j$时，$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$，$i,j=1,2,\cdots,n$；3）$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$的度量矩阵是单位矩阵；4）$x_i=(\alpha,\varepsilon_i)$，$i=1,2,\cdots,n$；5）$(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$；6）$|\alpha|^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$。

因为n阶正定矩阵均与单位矩阵合同，所以，$n(n>0)$维欧氏空间V的标准正交基是存在的，并且，可以具体写出关系式，求

出标准正交基。另外，下面的几个定理从逐步扩充的角度求出标准正交基，证明标准正交基的存在性：

1）若$m<n$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是V的正交组，则存在$\alpha\in V$，使$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha$是V的正交组，并且

$$\alpha=\beta-\frac{(\beta,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1-\cdots-\frac{(\beta,\alpha_m)}{(\alpha_m,\alpha_m)}\alpha_m$$

其中，β是任一个使$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，$\beta$线性无关的向量。

2）$n(n>0)$维欧氏空间V中的任一个正交向量组 都 能扩充成V的一组正交基。

3）若$m<n$，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$是$n(n>0)$维欧氏空间V的一标准正交组，则存在单位向量$\varepsilon\in V$，使$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2,\cdots$，$\varepsilon_m$，$\varepsilon$是V的一标准正交组。

4）$n(n>0)$维欧氏空间V中的任一个标准正交组都能扩充成V的一组标准正交基。

5）对于$n(n>0)$维欧氏空间V的任一组基α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n，都可以找到V的一 标 准 正 交 基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots$，$\varepsilon_n$，使 得$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i)=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，从 而，$\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_n$到$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2,\cdots$，$\varepsilon_n$的过渡矩阵是上三角形 的，且主对角线 上 的元素为正数。

上面的1)中，实际上给出了由V的任一组基求出V的 一组标准正交基的方法，称为施密特正交化过程。这一方法是有规律性的，可以用计算机来实现。

关于标准正交基的讨论是在欧氏空间中进行的，即在事先确定的内积下进行讨论。若不是这样，则问题变得十分简单：设V是$n(n>0)$维实线性空间，α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n是V的任一组基，则可以适当地规定V的内积，使V 成为欧氏空间，并且，使α_1，α_2，$\cdots,\alpha_n$成为V的一组标准正交基。实际上，只要规定：当$i=j$时，$(\alpha_i,\ \alpha_j)=1$；当$i\neq j$时，$(\alpha_i,\ \alpha_j)=0$，就可以了。

三　正交矩阵

研究欧氏空间的不同标准正交基之间的关系，就引出了正交矩阵的概念。

设A是n阶实矩阵．若$A'A=E$，则称A是一个正交矩阵．

正交矩阵有下列性质：1)正交矩阵是可逆矩阵，且其逆矩阵为正交矩阵；2)正交矩阵的行列式等于+1或-1；3)正交矩阵的乘积是正交矩阵；4)正交矩阵的伴随矩阵是正交矩阵；5)三角形的正交矩阵必为对角形的矩阵，且主对角线上的元素为+1或-1．

设$A=(a_{ij})$是n阶实矩阵，则下列诸条等价：1)$A'A=E$；2)$A^{-1}=A'$；3)$AA'=E$；4)行关系：$a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{in}a_{jn}=1(i=j)$或$0(i\neq j)$；5)列关系：$a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}+\cdots+a_{ni}a_{nj}=1(i=j)$或$0(i\neq j)$．

关于标准正交基与正交矩阵的关系，有下面的：1)标准正交基之间的过渡矩阵是一个正交矩阵；反之，任一个正交矩阵，总是可以作为某两组标准正交基之间的过渡矩阵．2)设ε_1，$\varepsilon_2,\cdots$，ε_n是n维欧氏空间V的一组标准正交基，且$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots,\varepsilon_n)A$，则$\eta_1$，$\eta_2,\cdots$，$\eta_n$是V的一组标准正交基$\Leftrightarrow$A是一正交矩阵．

由施密特正交化过程，容易得到下面的一些结论：1）设A是n（$n>0$）维欧氏空间V的一组基的度量矩阵（A是正定矩阵），则存在一个主对角线元素为正数的上（下）三角形矩阵Q，使$A=Q'Q$．2）对于任一n阶可逆实矩阵A，必存在一个正交矩阵T与一个主对角线元素为正数的上三角形矩阵Q，使$A=TQ$，且T与Q由A唯一决定．3）对于任一n阶可逆实矩阵A，必存在一正交矩阵U与一个主对角线元素为正数的下三角矩阵K，使$A=KU$，且U与K由A唯一决定．

四　欧氏空间的同构

设V与V′是欧氏空间．若有V到V′的双射σ，使得对于任意

α，$\beta\in\mathrm{V}$及任意$k\in\mathbf{R}$，均成立：1)$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$，2)$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$，3)$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$，则称$\sigma$是V到 V′ 的同构映射，称V与V′同构，记作$\mathrm{V}\overset{\sigma}{\simeq}\mathrm{V}'$，简记作$\mathrm{V}\simeq\mathrm{V}'$。

欧氏空间的同构具有反身性、对称性、传递性。任意n维欧氏空间V均与欧氏空间$\mathbf{R}^n$(通常意义下的内积)同构。两个有限维氏空间同构的必要充分条件是它们的维数相等。于是，从抽象的观点看，欧氏空间的同构完全被其维数决定。同构的欧氏空间被认为是相同的。从而，欧氏空间$\mathbf{R}^n$(通常意义下的内积)可以作为n维欧氏空间的代表。

Ⅱ 正交变换

设σ是欧氏空间V的线性变换。若对于任意$\alpha\in\mathrm{V}$，有$|\sigma(\alpha)|=|\alpha|$，则称$\sigma$是一个正交变换。欧氏空间V的单位变换Te是正交变换.设η是欧氏空间V的一单位向量,定义$\sigma:\sigma(\alpha)=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta$，$\forall\alpha\in\mathrm{V}$，则$\sigma$是一个正交变换,称为镜面反射,且$\sigma^2=\mathrm{Te}$。

欧氏空间V的正交变换有下列简单性质：1)V的正交变换σ是V到V的单射；2)若V的正交变换σ有特征值λ_0，则$\lambda_0\neq0$；3)V的正交变换的特征值是+1或−1;4)V的两个正交变换的乘积是V的正交变换；5)V的正交变换保持夹角、距离不变；6)对于V的任意两个不同的单位向量ε与η，存在V的一个镜面反射σ,使$\sigma(\varepsilon)=\eta$。

设σ是欧氏空间V的线性变换，则下列诸条相互等价：1)σ保持长度不变，即，对于任意$\alpha\in\mathrm{V}$，有$|\sigma(\alpha)|=|\alpha|$；2)$\sigma$保持距离不变，即，对于任意$\alpha$，$\beta\in\mathrm{V}$，有$d(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=d(\alpha,\beta)$；3)$\sigma$保持内积不变，即，对于任意$\alpha$，$\beta\in\mathrm{V}$，有$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$；4)$\sigma$保持单位向量的内积不变，即，对于任意单位向量$\varepsilon$，$\eta\in\mathrm{V}$，有$(\sigma(\varepsilon),\sigma(\eta))=(\varepsilon,\eta)$；5)$\sigma$保持单位向量的长度不变，即，对于任意单位向量$\varepsilon\in\mathrm{V}$，有$|\sigma(\varepsilon)|=|\varepsilon|=1$。

当σ是$n(n>0)$维欧氏空间V的线性变换时，还有下列诸条也

等价：6)对于V的任一组基α_1，α_2，…，α_n，有$(\sigma(\alpha_i),\sigma(\alpha_j))=(\alpha_i,\alpha_j)$，$i$，$j=1,2,\cdots,n$；7)若$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是V的任一标准正交基，则$\sigma(\varepsilon_1)$，$\sigma(\varepsilon_2)$，…，$\sigma(\varepsilon_n)$也是V的一标准正交基；8)$\sigma$在V的任一标准正交基下的矩阵是正交矩阵。

$n(n>0)$维欧氏空间V的正交变换还有下列性质：1)V的正交变换σ是V到V的双射，从而，是V到V的同构映射；2)V的正交变换σ是可逆的，并且，其逆变换σ^{-1}也是正交变换；3)V的正交变换σ的特征值λ_0与$1/\lambda_0$成对出现；4)V的正交变换σ的行列式等于＋1或－1。若等于＋1，则称σ是第一类的；若等于－1，则称σ是第二类的。镜面反射是第二类的正交变换；5)V的任一正交变换可以表示为一系列镜面反射的乘积；6)若V的正交变换σ以1作为一个特征值，且属于特征值1的特征子空间的维数为$n-1$，则σ是镜面反射；7)第二类正交变换一定以－1作为它的一个特征值；8)奇数维欧氏空间的第一类正交变换一定以1作为它的一个特征值。

下面给出正交变换的几何意义：1)二维几何空间V_2的一个正交变换或者是旋转，或者是对一条直线的反射。前者是第一类正交变换，后者是第二类正交变换。2)三维几何空间V_3的一个正交变换或者是绕直线的旋转，或者是对于平面的反射，或者是这两者的合成。在第一种情形是第一类正交变换，在后两种情形是第二类正交变换。

$n(n>0)$维欧氏空间V中存在标准正交基，使V的正交变换σ在该基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_k & & & & & \\ & & & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & \\ & & & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \cos\theta_t & -\sin\theta_t \\ & & & & & & \sin\theta_t & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

其中$\lambda_i=1$或-1，$i=1,2,\cdots,k$。

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$是欧氏空间V的两个向量组，则存在V的正交变换$\sigma$，使$\sigma(\alpha_i)=\beta_i$，$i=1,2,\cdots,m \Leftrightarrow (\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)$，$i,j=1,2,\cdots,m$。

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是欧氏空间V的两标准正交基，则存在V的正交变换$\sigma$，使$\sigma(\alpha_i)=\beta_i$，$i=1,2,\cdots,n$。

Ⅳ　正交补、正射影、最小平方偏差

一　子空间的正交关系

欧氏空间V的子空间W对于V的内积来说也作成欧氏空间。

设W，S是欧氏空间V的非空子集。若对于任意$\alpha\in W$，任意$\beta\in S$，均有$(\alpha,\beta)=0$，则称W与S正交，记作$W\perp S$。若向量α与W的任意向量正交，则称α与W正交，记作$\alpha\perp W$。

设W，S是欧氏空间V的子空间。若$W\perp S$，则$W\cap S=\{0\}$，从而，和$W+S$是直和。若$W_1,W_2,\cdots,W_t$是欧氏空间V的两两正交的子空间，则和$W_1+W_2+\cdots+W_t$是直和。

欧氏空间V中与向量α正交的一切向量作成V的一个子空间。V中与非空子集W正交的一切向量作成V的一个子空间。

二　正交补

设W是欧氏空间V的子空间。若存在V的子空间S，使得$W\perp S$，且$W+S=V$，则称S是W的一个正交补。若欧氏空间V的子空间W有正交补，则其正交补唯一，记作$W^{\perp}$。

正交补有如下性质：1）$(W_1+W_2)^{\perp}=W_1^{\perp}\cap W_2^{\perp}$；2）$(W^{\perp})^{\perp}=W$；3）$(W_1\cap W_2)^{\perp}=W_2^{\perp}+W_2^{\perp}$；4）$(W_1+W_2)^{\perp}=W_1^{\perp}\cap W_2^{\perp}\Leftrightarrow(W_1\cap W_2)^{\perp}=W_1^{\perp}+W_2^{\perp}$。

设W是欧氏空间V的有限维子空间，则W的正交补$W^{\perp}$存在，且$W^{\perp}=\{x\,|\,x\in V,\ x\perp W\}$。换言之，W的正交补恰由所有与W正交的向量组成。特别地，当欧氏空间V是有限维时是如此，而且$dimV=dimW+dimW^{\perp}$。必须指出，当W是无限维时，结

论不成立。

当取定W的一组基α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_m之后，容易由上述$W^{\perp}$的结构，将$W^{\perp}$确定出来。

三　正射影

设W是欧氏空间V的子空间，$W^{\perp}$存在，$V=W\oplus W^{\perp}$，对任意$\alpha\in V$，有$\alpha=\beta+\gamma$，$\beta\in W$，$\gamma\in W^{\perp}$，则称β是向量α在子空间W上的正射影，也称内射影。

设W是欧氏空间V的子空间，$W^{\perp}$存在，$\alpha\in V$，则有：1）若β是α在W上的正射影，则$(\alpha-\beta)\perp W$，且对于任意$\beta'\in W$，有$|\alpha-\beta'|^2=|\alpha-\beta|^2+|\beta-\beta'|^2$；2）$\beta$是$\alpha$在W上的正射影$\Leftrightarrow$对任意$\beta'\in W$，成立$|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha-\beta'|$，而且，等号成立当且仅当$\beta'=\beta$。

α在W上的正射影，有明显的几何意义。当V是三维几何空间时，α在W上的正射影，就是“点”α在平面W上的正射影，$\alpha-\beta$就是由“点”α到W的垂线，$|\alpha-\beta|$就是“点”α到平面W的最短距离。

当W是有限维子空间时，α在W上的正射影是存在且唯一的，并且，可以具体地求出来。

若α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_m是W的任一组基，则向量$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m$是向量$\alpha$在W上的正射影$\Leftrightarrow x_1$，$x_2,\cdots x_m$为下列线性方程组的解：$\sum\limits_{j=1}^{m}(\alpha_i,\alpha_j)x_j=(\alpha,\alpha_i)$，$i=1$，$2$，$\cdots$，$m$。

四　最小平方偏差问题

设β是α在子空间W上的正射影，则对于任意$\beta'\in W$，$\beta'\neq\beta$，成立$|\alpha-\beta|<|\alpha-\beta'|$。因此，把正射影$\beta$称为W到$\alpha$的最佳逼近。而求$\beta$，也就是要找使得$(d(\alpha,x))^2=|\alpha-x|^2$(任意$x\in W$)最小的$x=\beta$，称为最小平方偏差问题。

1　最小二乘法

在生产实践与科学实验中遇到的某些问题所归结出来的数学模型，往往是一个没有解的$m\times n$线性代数方程组(称为矛盾方程组)，讨论这一类方程组具有较大的实际意义．矛盾方程组常常是这样归结出来的：根据某些科学规律或预测，量b(实数)与量a_1，a_2，…，a_n(都是实数)之间存在着线性关系式

$$b=x_1a_1+x_2a_2\cdots+x_na_n, \tag{1}$$

这个关系式可能是(相对地)精确的，也可能是近似的，关系式中的x_1，x_2，…，x_n是未知的常系数(实数)，它们可以由对a_1，a_2，…，a_n；b进行一系列测试决定出来，设对a_1，a_2，…，a_n；b进行了m次测试，测试出来的数据是 a_{i1}，a_{i2}，…，a_{in}；b_i($i=1, 2, \cdots, m$)，则由关系式(1)可知成立下面各式：

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i,\quad i=1, 2, \cdots, m, \tag{2}$$

或者

$$AX=B \tag{3}$$

其中$A=(a_{ij})_{m\times n}$是(2)的系数矩阵，$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)'$，$B=(b_1, b_2, \cdots, b_m)'$．

现在的问题是要求出X．由于对关系式(1)的认识的局限性(可能没有归结好)，以及测试仪器产生的测量误差，所以，方程组(2)或(3)总是一个矛盾方程组，要谈它的精确解是不可能的，反而是无意义的．因此，只能这样找X，使AX尽可能接近B．用式子表示，也就是要求X的最佳近似值$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)'$，使

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\right)^2 \tag{4}$$

(总体)的值最小．这种意义下得到的解称为矛盾方程组AX=B的最小二乘解．

一般说来，m恒大于n，即测量次数恒多于量a_1，a_2，…，a_n的个数，这样可以提高X的精确度．

下面具体给出求X的方法。

记$A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，其中$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$都是$m$维列向量，则上述问题((4)式)就归结为：找$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)'$，使$|B-(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n)|^2$最小，或者$|B-AX|^2$最小。即，求欧氏空间$\mathbf{R}^m$中向量B到子空间$W=L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$的最短距离。这个最小平方偏差问题就称为最小二乘方问题，解决这一问题的方法就称作最小二乘法。

设$C=B-AX$，则$C\perp W$。因此，当且仅当

$$(C, \alpha_1)=(C, \alpha_2)=\cdots=(C, \alpha_n)=0,$$

即 $$\alpha_1'C=\alpha_2'C=\cdots=\alpha_n'C=0 \qquad (5)$$

亦即 $$A'(B-AX)=0, \quad A'AX=A'B \qquad (6)$$

于是$AX=B$的最小二乘解可以由相容的方程组（6）的诸解中找出。特别地，当$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关时，$A'A$可逆，此时，（6）有唯一解 $$X=(A'A)^{-1}A'B \qquad (7)$$

则（7）自然就是最小二乘解。

2　函数的逼近问题

考虑$[0,2\pi]$上的一切连续实函数所作成的欧氏空间$C[0,2\pi]$（Ⅰ中的例子）。设W是由下面$2n+1$个函数1，$\cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx$所生成的子空间。利用施密特正交化方法，求出W的一标准正交基$\alpha_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x$，$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x$，$\cdots$，$\alpha_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$，$\beta_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$。于是，W的每个元素都可以写成$p_n(x)=a_0/2+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx$(*)的形状。$p_n(x)$称为一个$n$次三角多项式。

设$f(x)\in C[0,2\pi]$，求一$p_n(x)$，使得$\int_0^{2\pi}[f(x)-p_n(x)]^2dx$的值最小，也就是$|f(x)-p_n(x)|^2=\int_0^{2\pi}[f(x)-p_n(x)]^2dx$的值最小。这就是W对$f(x)$的最佳逼近问题，因此，所求的$p_n(x)$应该

是$f(x)$在W上的正射影．易得$p_n(x)=(f,\ \alpha_0)\alpha_0+(f,\alpha_1)\alpha_1+(f,\ \beta_1)\beta_1+\cdots+(f,\alpha_n)\alpha_n+(f,\beta_n)\beta_n$。与(*)比较，得到

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f,\ \alpha_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx,$$

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(f,\ \alpha_k)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kxdx;$$

$$b_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(f,\beta_k)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kxdx;$$

因为$\cos 0x=1$，所以，可以写为

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kxdx,\quad k=0,1,2,\cdots,n;$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kxdx,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

a_0，a_1，b_1，…，a_n，b_n称为$f(x)$的富立叶系数。

V　对称变换与实对称矩阵

一　对称变换与实对称矩阵

设σ是欧氏空间V的一个线性变换．若对于任意α，$\beta\in V$，均有$(\sigma(\alpha),\ \beta)=(\alpha,\ \sigma(\beta))$，则称$\sigma$是V的一个对称变换。

对称变换有下列简单性质：1)Te是对称变换；2)实数k与对称变换σ的乘积$k\sigma$是对称变换；3)两个对称变换的和是对称变换；4)欧氏空间V的变换σ是对称变换$\Leftrightarrow$对任意α，$\beta\in V$，成立$(\sigma(\alpha),\ \beta)=(\alpha,\ \sigma(\beta))$。

设σ是$n(n>0)$维欧氏空间V的一个线性变换．若σ是V的一个对称变换，则σ在V的任一标准正交基下的矩阵是实对称矩阵．反之，若σ在V的某一标准正交基下的矩阵是实对称矩阵，则σ是V的一个对称变换．简言之，σ是对称变换的必要充分条件是σ在V的任一标正交基下的矩阵是对称矩阵。

设M是n维欧氏空间V的所有对称变换的集合，N是所有n阶实对称矩阵的集合．若V中取定一组标准正交基，且使V的对称变换σ与σ在该基下的矩阵对应．则得到M到N的一个双射。

$n(n>0)$维欧氏空间V的两个对称变换σ_1，σ_2的乘积$\sigma_1\sigma_2$是对称变换$\Leftrightarrow \sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1$。

二　特征值与特征向量

实对称矩阵的特征值都是实数．从而，n阶实对称矩阵有n个实特征值（重特征值按重数来计算）．

$n(n>0)$维欧氏空间V的任一对称变换至少有一个特征值．

设σ是欧氏空间V的对称变换，W是V的的子空间，$W^{\perp}$存在．若W是σ的不变子空间，则$W^{\perp}$也是σ的不变子空间．

设σ是$n(n>0)$维欧氏空间V的对称变换，λ_0是σ的一个特征值，α是属于λ_0的特征向量．若$M=\{x\,|x\in V$，且$x\perp\alpha\}$，则M是σ的不变子空间，且$\dim M=n-1$。

设σ是$n(n>0)$维欧氏空间V的一个对称变换，则σ有n个特征向量作成V的一组标准正交基．从而，σ在该基下的矩阵是对角形矩阵，主对角线上的元素就是σ的全部特征值（重特征值按重数计算）．

设σ是$n(n>0)$维欧氏空间V的一个对称变换，则V可以分解为两两正交的σ的一维不变子空间的直和．

设σ是$n(n>0)$维欧氏空间V的一个对称变换，λ_1，λ_2，…，λ_r是σ的全部互异的特征值，则从每个特征子空间V_{λ_i}中各取一组标准正交基，即可合并成V的一组标准正交基，且σ在该组基下的矩阵是对角形．

三　实对称矩阵正交对角化

对于任一n阶实对称矩阵A，都存在一个n阶正交矩阵T，使$T'AT=T^{-1}AT$成对角形，主对角线上的元素就是A的全部特征值（重特征值按重数计算）．

求正交矩阵T和对角形$T'AT=T^{-1}AT$，称为正交对角化．按下列步骤进行：1)求A的特征值．设λ_1，λ_2，…，λ_r是A的全部不同的特征值；2)对于每个λ_i，求齐次线性方程组$(\lambda_i E-A)X$

$=0$ 的一基础解系，这就是A的特征子空间 V_{λ_i} 的一组基．由 V_{λ_i}的这组基出发，施行施密特正交化过程，得到V_{λ_i}的一组标准正交基ε_{i1}，ε_{i2}，$\cdots\varepsilon_{ik_i}$；3)以ε_{11}，$\cdots$，ε_{1k_1}，$\cdots$，ε_{r1}，$\cdots$，ε_{rk_r}为列作成T，则T是正交矩阵，且$T'AT=T^{-1}AT$是对角形矩阵D，D的主对角线元素就相应地写为$\lambda_1,\cdots,\lambda_1,\cdots$，$\lambda_r,\cdots,\lambda_r$，其中$\lambda_1$重复$k_1$次，$\cdots$，$\lambda_r$重复$k_r$次，$k_1+\cdots+k_r=n$．

四　实二次型的正交化简

对于任意一个实二次型$f(x_1, x_2,\cdots,x_n)=X'AX$，都存在正交矩阵T，使得，经过线性替换$X=TY$化为$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中，$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\cdots$，$\lambda_n$为$f$的矩阵A的全部特征值（重特征值按重数计算）．

设$f(x_1, x_2,\cdots, x_n)=X'AX$是一个$n$元实二次型，A是$f$的矩阵，则：1)$f$的秩等于A的非零特征值的个数，而$f$的符号差等于A的正特征值的个数与负特征值的个数的差；2)f是正定二次型，当且仅当A的特征值都是正数．

现在考虑空间直角坐标系中二次曲面方程化简的问题．

二次曲面的一般方程是

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+d=0\,.$$

设　$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$．

则　$X'AX+2B'X+d=0$．经过转轴，坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},\quad X_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},$$

或者$X=CX_1$，其中C为正交矩阵，且$|C|=1$．在新坐标系中，曲面的方程就是 $X_1'(C'AC)X_1+2(B'C)X_1+d=0$．我们可以选择正交矩阵C，$|C|=1$，且使

$$C'AC=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix},$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$为A的特征值.从而,曲面在新坐标系中的方程为

$$\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 y_1^2+\lambda_3 z_1^2+2b_1^* x_1+2b_2^* y_1+2b_3^* z_1+d=0,$$

其中 $(b_1^*, b_2^*, b_3^*)=(b_1, b_2, b_3)C$. 此时，再按$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$是否为零的情况，并作适当的移轴，就可以把曲面的方程化成标准方程. 假设λ_1, λ_2, λ_3全不为零，则作下面的移轴变换

$$x_1=x_2-\frac{b_1^*}{\lambda_1},\ y_1=y_2-\frac{b_2^*}{\lambda_2},\ z_1=z_2-\frac{b_3^*}{\lambda_3},$$

从而曲面的方程化为 $\lambda_1 x_2^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 z_2^2+d^*=0$,

其中 $d^*=d-\frac{b_1^{*2}}{\lambda_1}-\frac{b_2^{*2}}{\lambda_2}-\frac{b_3^{*2}}{\lambda_3}$.

Ⅵ 酉空间

一 酉空间与欧氏空间的对应关系

欧氏空间的理论，作相应的改变，就成为酉空间的理论，二者之间的对应关系罗列如下：实数←→复数；欧氏空间←→酉空间；A'←→$\overline{A}'$；正交矩阵←→酉矩阵；正交变换←→酉变换；实对称矩阵←→厄米特矩阵；对称变换←→厄米特变换；实二次型←→厄米特二次型.

二 酉空间的基本概念

设V是复数域**C**上的线性空间,对于V中任意两个向量α与β,定义唯一的复数，记为(α, β). 若(α, β)满足：1) $(\alpha, \beta)=\overline{(\beta, \alpha)}$(取共轭复数)；2)$(k\alpha, \beta)=k(\alpha, \beta)$；3)$(\alpha+\beta, \gamma)=(\alpha, \gamma)+(\beta, \gamma)$；4)$(\alpha, \alpha)\geqslant 0$，而等号成立当且仅当$\alpha=0$；其中$\alpha$, β, γ是V中任意向量，k是**C**中任意数，则称(α, β)是α与β的内积，称在V上定义了一个内积.

若复数域**C**上的线性空间V中定义了内积，则称V是一个酉空间.

在线性空间C^n中，对于向量 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，定义 $(\alpha, \beta)=a_1\overline{b_1}+a_2\overline{b_2}+\cdots+a_n\overline{b_n}$，则这是$C^n$的一个内积，从而$C^n$作成酉空间。

酉空间的内积具有性质：

1) $(\alpha, k\beta)=\overline{k}(\alpha, \beta)$；

2) $\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{n} l_j\beta_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} k_i\overline{l_j}(\alpha_i, \beta_j)$.

$\sqrt{(\alpha, \alpha)}$称为α的长度，记作$|\alpha|$。当$|\alpha|=1$时，称α是单位向量。

柯西-布涅柯夫斯基不等式成立。即，对酉空间V中的任意向量α，β，成立$|(\alpha, \beta)|\leqslant|\alpha|\,|\beta|$，等号成立当且仅当$\alpha$，$\beta$线性相关。

设α，β是酉空间V中的两个向量。若$(\alpha, \beta)=0$，则称α，β正交，记作$\alpha\perp\beta$。

酉空间V中两两正交的非零向量α_1，α_2，…，α_s所组成的向量组线性无关。

三　标准正交基与酉矩阵

在n维酉空间V中n个两两正交的单位向量组成的基称为V的一组标准正交基。设ε_1，ε_2，…，ε_n是酉空间V的一标准正交基，$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$，$\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n$，则$x_i=(\alpha, \varepsilon_i)$，$i=1, 2, \cdots, n$，$(\alpha, \beta)=x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+\cdots+x_n\overline{y_n}$。

$n(n>0)$维酉空间V中任意一组线性无关的向量可以用施密特正交化过程，并扩充为V的一组正交基，再单位化，使成为一组标准正交基。

设A是n阶复矩阵，$\overline{A}$表示以A的元素的共轭复数作元素的矩阵。若$\overline{A}'A=E$，则称A是酉矩阵。

酉矩阵的行列式的模为1。酉矩阵的特征值的模为1。酉空

间的标准正交基之间的过渡矩阵是酉矩阵.

任意$n(n>0)$维酉空间都与酉空间$\mathbf{C}^n$同构. 有限维酉空间同构的必要充分条件是它们的维数相等.

四　酉变换

设σ是酉空间V的线性变换. 若对于任意$\alpha,\beta\in V$,有$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$, 则称$\sigma$是V的酉变换. Te是酉变换. 两个酉变换的乘积是酉变换. 可逆酉变换的逆变换是酉变换.

$n(n>0)$维酉空间V的酉变换σ是V到V的双射, 从而σ是V到V的同构映射. 酉变换在标准正交基下的矩阵为酉矩阵.

五　正交补

设W,S是酉空间V的非空子集.若对于任意$\alpha\in W$与任意$\beta\in S$, 均有$(\alpha,\beta)=0$, 则称W, S正交, 记作$W\perp S$.

设W是酉空间V的子空间. 若有V的子空间S,使得$W\perp S$, 且$V=W+S$, 则称S是W的正交补. 若W有正交补,则必唯一, 记作$W^{\perp}$. $V=W\oplus W^{\perp}$. 设W是酉空间V的有限维子空间, 则$W^{\perp}$存在, 并且$W^{\perp}=\{x\mid x\in V,\ \forall\alpha\in W,\ (x,\alpha)=0\}$.

六　厄米特变换与厄米特矩阵

设A是n阶复矩阵. 若$\overline{A}'=A$, 则称A是厄米特矩阵.

设σ是酉空间V的线性变换. 若对于任意α, $\beta\in V$, 均有$(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma(\beta))$, 则称$\sigma$是一个厄米特变换.

厄米特变换在标准正交基下的矩阵是厄米特矩阵.

若W是厄米特变换σ的不变子空间, 且$W^{\perp}$存在, 则$W^{\perp}$也是σ的不变子空间. 厄米特矩阵的特征值全为实数, 它的属于不同特征值的特征向量必正交.

设σ是$n(n>0)$维酉空间V的一个厄米特变换, 则σ有n个特征向量作成V的一组标准正交基.

若A是厄米特矩阵, 则有酉矩阵C, 使$C^{-1}AC=\overline{C}'AC$为对角形矩阵, 且主对角线上的元素就是A的所有特征值（重特征值

按重数来计算）.

设$A=(a_{ij})$为厄米特矩阵．二次齐次函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i\overline{x_j}=\overline{X}'AX$ 称为厄米特二次型．存在酉矩阵C，当$X=CY$时，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\lambda_1y_1\overline{y_1}+\lambda_2y_2\overline{y_2}+\cdots+\lambda_ny_n\overline{y_n}$，其中$\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_n$为A的全部特征值（重特征值按重数计算）.

§3 重点难点

本章的主题词是：内积，欧氏空间，向量的长度（模），单位向量，柯西-布涅柯夫斯基不等式，向量的夹角，三角不等式，距离，正交，正交向量组；度量矩阵，正交基，标准正交基，施密特正交化过程，正交矩阵，欧氏空间的同构；正交变换，镜面反射；正交补，正射影（内射影），最小二乘法，最佳逼近；对称变换，正交对角化；酉空间，酉矩阵，酉变换，厄米特矩阵，厄米特变换，厄米特二次型.

本章的基本方法是：向量夹角计算法，度量矩阵求法，用度量矩阵求内积法，单位化方法，正交化方法，标准正交基求法，用标准正交基求坐标法，用标准正交基求内积法，正交补求法，正射影求法，实对称矩阵正交对角化方法，实二次型正交化简法，最小二乘法，厄米特矩阵对角化法，厄米特二次型化简法.

本章的重点是：欧氏空间的基本概念，标准正交基与正交矩阵，对称变换与实对称矩阵.

内积是欧氏空间的最基本的概念，利用内积定义了长度、夹角、距离、正交等基本概念，所有这些，都作为全章的基础，因此，欧氏空间的基本概念，成为本章的一个重点.

我们主要讨论有限维欧氏空间，而标准正交基起着根本的作用，标准正交基贯穿于全章，成为基本的工具．由于标准正交基

的存在，使得向量的内积、长度、距离等都有了较为明显的表达式．由于研究标准正交基之间的关系而引入的正交矩阵，既作为标准正交基之间的过渡矩阵，又刻划了正交变换的特征．因此，标准正交基与正交矩阵，成为本章的一个重点．

$n(n>0)$维欧氏空间的对称变换与n阶实对称矩阵密切联系在一起，由于有了欧氏空间的知识，就证明了实对称矩阵的特征值均为实数，找到了对称变换的n个线性无关的特征向量组成标准正交基，从而使实对称矩阵正交对角化，也使实二次型正交化简，得到了一些更深刻的结果，因此，对称变换与实对称矩阵，成为本章的一个重点．

本章的难点是：正交变换，正交补，对称变换与实对称矩阵．

正交变换成为本章的一个难点，原因在于：1)正交变换的性质很多，而且有的是特征性质，有的则不是，有的性质因有限维与无限维而异；2)$n(n>0)$维欧氏空间的正交变换按其行列式分为两类，不容易理解其本质；3)正交变换的特征值较对称变换要复杂得多；4)二维几何空间V_2、三维几何空间V_3中的正交变换，其分类与推证也较复杂．解决困难的方法是：1)详细地研究例子Te与镜面反射，熟悉定义；2)通过举反例给以区别，并加深认识；3)详细地研究V_2与V_3的情况，理解其几何意义．

正交补成为本章的一个难点，原因在于：1)正交补综合了子空间、正交、和、直和几种概念，从而成为较为高级的概念；2)其存在性的证明不易理解与掌握，而且，无限维的情况不成立；3)性质及应用较多，并且较复杂．解决困难的方法是：1)复习子空间、和、直和等概念，作好准备；2)详细地分析正交补的定义，理解“正交”与“补”的含义；3)在理解与应用正交补的过程中，充分发挥直和分解式的作用；4)重点研究$n(n>0)$维欧氏空间的子空间的正交补，并且，注意标准正交基的作用．

对称变换与实对称矩阵，既是本章的一个重点，又是本章的

一个难点，原因在于：1)较多地应用了以前的知识，综合性较强；2)对称变换的实质不易理解；3)计算较复杂；4)主要定理的证明应用了数学归纳法.解决困难的方法是：1)复习特征值、特征向量、正交化等，作好准备；2)抓住对称变换与实对称矩阵的联系，通过实对称矩阵来加深理解对称变换；2)注意发挥标准正交基的作用；4)认真地做一个例子。

§4　习题类解

Ⅰ　计算题

一　计算内积、长度、夹角、距离

按照定义，直接进行计算.

例1　在欧氏空间R^4(内积按通常定义)中，已知$\alpha=(2, 1, 3, 2)$，$\beta=(1, 2, -2, 1)$，求$|\alpha|$，$|\beta|$，(α,β)，$\langle\alpha, \beta\rangle$，$|\alpha+\beta|$，$d(\alpha, \beta)$。

解　$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{2^2+1^2+3^2+2^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$，

$|\beta|=\sqrt{(\beta,\beta)}=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{10}$，

$(\alpha, \beta)=2\times1+1\times2+3\times(-2)+2\times1=0$，

$\langle\alpha, \beta\rangle=\arccos\dfrac{(\alpha, \beta)}{|\alpha|\ |\beta|}=\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$，

$|\alpha+\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}=\sqrt{3^2+3^2+1^2+3^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$，

$d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|=\sqrt{1^2+(-1)^2+5^2+1^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$。

二　求度量矩阵、不等式

按照度量矩阵的定义及不同基的度量矩阵之间的关系，求出度量矩阵。

按照柯西-布涅柯夫斯基不等式及内积的具体意义，求出相应的不等式。

例2　设ε_1，ε_2，…，ε_n是欧氏空间V的一组基，且$(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=a_{ij}(i, j=1, 2,\cdots, n)$，向量$\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$，$\beta=\sum\limits_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j$，

试写出基ε_1，ε_2，…，ε_n的度量矩阵，$|\alpha|^2$，(α, β)，柯西-布涅柯夫斯基不等式。

解 基ε_1，ε_2，…，ε_n的度量矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$|\alpha|^2=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i\right)=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i,\ \sum_{j=1}^{n} x_j\varepsilon_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j(\varepsilon_i,\ \varepsilon_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j=XAX',$$

$X=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$.

$(\alpha,\ \beta)=XAY'$，$Y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$.

$|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha|\ |\beta|$ 具体写为 $|XAY'|\leqslant\sqrt{XAX'}\sqrt{YAY'}$.

例 3 在欧氏空间$\mathbf{R}^4$中，已知基$\alpha_1=(1,\ -1,\ 0,\ 0)$，$\alpha_2=(-1,\ 2,\ 0,\ 0)$，$\alpha_3=(0,\ 1,\ 2,\ 1)$，$\alpha_4=(1,\ 0,\ 1,\ 1)$ 的度量矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & 9 \\ 1 & -1 & 9 & 7 \end{pmatrix},$$

试求基$\varepsilon_1=(1,\ 0,\ 0,\ 0)$，$\varepsilon_2=(0,\ 1,0,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1,0)$，$\varepsilon_4=(0,0,0,1)$的度量矩阵。

解 因为，由基α_1，α_2，α_3，α_4到ε_1，ε_2，ε_3，ε_4的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}=C,$$

所以，基ε_1，ε_2，ε_3，ε_4的度量矩阵为

$$C'AC=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

三　求正交向量、标准正交基

根据正交的定义，求得所要求的正交向量，往往通过解线性方程组来完成。

由一组基出发求标准正交基，可以先正交化而后单位化，也可以边正交化边单位化。

例4　在欧氏空间R^4（内积按通常定义）中，求一个单位向量与$\alpha_1=(2, 4, -2, 1)$，$\alpha_2=(0, 0, 0, 1)$，$\alpha_3=(2, 3, 4, 3)$都正交。

解　设向量$\beta=(x_1,x_2,x_3,x_4)$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$都正交，则

$$\begin{cases}(\beta,\alpha_1)=2x_1+4x_2-2x_3+x_4=0\\(\beta,\alpha_2)=\qquad\qquad\qquad\qquad x_4=0\\(\beta,\alpha_3)=2x_1+3x_2+4x_3+3x_4=0,\end{cases}$$

解齐次线性方程组，取一非零解，得到一个向量 $\beta=(11, -6, -1, 0)$，将β单位化：

$$\beta_0=\frac{\beta}{|\beta|}=\left(\frac{11}{2\sqrt{43}},\ -\frac{3}{\sqrt{43}},\ -\frac{1}{2\sqrt{43}},\ 0\right),$$

则β_0就是所求的单位向量。

例5　在欧氏空间R^3（内积按通常定义）中，由基$\alpha_1=(0, 1, 1)$，$\alpha_2=(1, 1, 0)$，$\alpha_3=(1, 0, 1)$出发，求一组标准正交基。

解　取$\beta_1=\alpha_1=(0, 1, 1)$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2-\frac{1}{2}\beta_1=\frac{1}{2}(2,1,-1),$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\alpha_3-\frac{1}{2}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2$$

$$=\frac{2}{3}(1, -1, 1),$$

则β_1，β_2，β_3是一组正交基。再将它们单位化，得到一组标准正交基

$$\eta_1=\beta_1/|\beta_1|=\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1),$$

$$\eta_2=\beta_2/|\beta_2|=\frac{1}{\sqrt{6}}(2,\ 1,\ -1),$$

$$\eta_3=\beta_3/|\beta_3|=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ -1,\ 1).$$

四　求正交补、正射影

求正交补的方法有两个：1)求出W的一正交基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，$0<m<n$，扩充为V的正交基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n$，从而$W^{\perp}=L(\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n)$。2)求出W的一组基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$，$0<t<n$，且设$\{\beta_i\}=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$，解齐次线性方程组$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0$，$i=1,2,\cdots,t$，得一基础解系$\{\eta_1\}$，$\{\eta_2\}$，$\cdots$，$\{\eta_{n-t}\}$，则$W^{\perp}=L(\eta_1,\ \eta_2, \cdots,\ \eta_{n-t})$。

求α在W上的正射影的方法：设W的一组基为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$，则可求得方程组$\sum_{j=1}^{t}(\alpha_i, \alpha_j)x_j=(\alpha_i, \alpha), i=1,2,\cdots,t$ 的唯一解$(x_1,\ x_2, \cdots, x_t)$，从而，α在W上的正射影是$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_t\alpha_t$。

例6　在欧氏空间$\mathbf{R}^3$（内积按通常定义）中，子空间$W=L(\alpha_1,\ \alpha_2)$，$\alpha_1=(1,\ 2,\ 0)$，$\alpha_2=(2,\ -1,\ 0)$，求$W^{\perp}$。

解　因为$(\alpha_1,\ \alpha_2)=0$，所以α_1，α_2是W的一组正交基，扩充为$\mathbf{R}^3$的一正交基α_1, α_2，α_3，其中$\alpha_3=(0,\ 0,\ 1)$，则$W^{\perp}=L(\alpha_3)$。

例7　W是欧氏空间$\mathbf{R}^4$（内积按通常定义)的一个子空间，且W是下列线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3-x_4=0\\3x_1+2x_2\qquad-2x_4=0\\3x_1+x_2+9x_3-x_4=0\end{cases}$$

的解空间，求$W^{\perp}$。

解　求得所给线性方程组的系数矩阵的秩为2,所以，dimW

$=2$，从而，求得W的一组基$\alpha_1=(-6,9,1,0)$，$\alpha_2=(0,1,0,1)$。设$\beta=(x_1, x_2, x_3, x_4)$是$W^\perp$中的任意向量，则有$(\beta, \alpha_1)=(\beta, \alpha_2)=0$，解

$$\begin{cases}-6x_1+9x_2+x_3 \qquad =0\\ \qquad x_2 \qquad +x_4=0,\end{cases}$$

得一基础解系$\beta_1=(1,0,6,0)$，$\beta_2=(0,-1,9,1)$，因此，$W^\perp=L(\beta_1, \beta_2)$。

例8 欧氏空间R^4（内积按通常定义）中，子空间W的一组基为$\alpha_1=(1,-1,1,-1)$，$\alpha_2=(0,1,1,1)$，试求$\alpha=(1,1,1,1)$在W上的正射影。

解 方程组 $\begin{cases}(\alpha_1,\alpha_1)x_1+(\alpha_1,\alpha_2)x_2=(\alpha_1,\alpha)\\ (\alpha_2,\alpha_1)x_1+(\alpha_2,\alpha_2)x_2=(\alpha_2,\alpha)\end{cases}$

即为 $\begin{cases}4x_1-x_2 \quad =0\\ -x_1+3x_2=3\end{cases}$，

解得 $x_1=\frac{3}{11}$，$x_2=\frac{12}{11}$，从而，α在W上的正射影是

$$\beta=\frac{3}{11}\alpha_1+\frac{12}{11}\alpha_2=\left(\frac{3}{11}, \frac{9}{11}, \frac{15}{11}, \frac{9}{11}\right).$$

五 求矛盾方程组的最小二乘解

矛盾方程组$AX=B$的最小二乘解，即为$A'AX=A'B$的解，因为$(A'A, A'B)$与$A'A$的秩相等，所以$A'AX=A'B$总是有解。

例9 求矛盾方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2=3\\ 3x_1+x_2=4\\ x_1+2x_2=2\end{cases}$ 的最小二乘解。

解 由于 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}$，

所以， $A'A=\begin{pmatrix}14 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}$，$A'B=\begin{pmatrix}20\\ 5\end{pmatrix}$。

解方程组 $\begin{cases}14x_1+3x_2=20\\ 3x_1+6x_2=5,\end{cases}$

得到最小二乘解$x_1=7/5$，$x_2=2/15$。

六　实对称矩阵的正交对角化

按照§2，V，三，中的三个步骤进行。

例10　已知　$A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$，

试求正交矩阵T，使$T'AT=T^{-1}AT$为对角形。

解　1）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-17 & 2 & 2\\ 2 & \lambda-14 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-14\end{vmatrix}=(\lambda-9)(\lambda-18)^2$，

从而，A的特征值为$\lambda_1=9$，$\lambda_2=\lambda_3=18$。

2）对于$\lambda_1=9$，解方程组

$$\begin{cases}-8x_1+2x_2+2x_3=0\\ 2x_1-5x_2+4x_3=0\\ 2x_1+4x_2-5x_3=0,\end{cases}$$

得一基础解系(1，2，2)，单位化得 $\eta_1=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

对于$\lambda_2=\lambda_3=18$，解方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=0\\ 2x_1+4x_2+4x_3=0\\ 2x_1+4x_2+4x_3=0,\end{cases}$$

得一基础解系(−2，1，0)，(−2，0，1)，正交化并单位化得

$$\eta_2=\left(\frac{-2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ 0\right),\ \eta_3=\left(\frac{-2}{\sqrt{45}},\ \frac{-4}{\sqrt{45}},\ \frac{5}{\sqrt{45}}\right).$$

3）作　$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{45}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{\sqrt{45}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}}\end{pmatrix}$，

则　　$T'AT=T^{-1}AT=[9,18,18]$。

例11 用正交矩阵，将n阶对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ 化为对角矩阵。

解 1）

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1\cdots-1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1\cdots-1 & -1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -1 & -1 & -1\cdots\lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & -1\cdots-1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-n-1)(\lambda-1)^{n-1},$$

从而，A的特征值为$\lambda_1=n+1$，$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=1$。

2）对于$\lambda_1=n+1$，解方程组$((n+1)E-A)X=0$，得$x_1=x_2=\cdots=x_n$，一基础解系为(1，1，…，1)，单位化得

$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{n}}(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)$。

对于$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$，解方程组$(E-A)X=0$，得$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，一基础解系为(1，−1，0，…，0)，(1，1，−2，0，…，0)，…，(1，1，…，1，1−n)，它们两两正交，再单位化，得

$$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ -1,\ 0,\ \cdots,\ 0),$$

$$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}(1,1,-2,0,\cdots,0),$$

……………………………………………

$$\eta_n=\frac{1}{\sqrt{(1-n)^2+(n-1)}}(1,1,\cdots,1,1-n).$$

3）作 $T=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(1-n)^2+(n-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(1-n)^2+(n-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{2^2+2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(1-n)^2+(n-1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1-n}{\sqrt{(1-n)^2+(n-1)}} \end{pmatrix}$，

则 $T'AT=T^{-1}AT=[n+1, 1, \cdots, 1]$。

七 实二次型的正交化简

设有实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=XAX'$，$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，对A正交对角化，求得T，作 $X=TY$，则 f 化为 $\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$，$\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_n$ 为 $T'AT$ 的主对角线上的元素。若只要求写出标准形，或者仅判断是否正定，则不必求出T，而只求出A的特征值即可以。

例12 用正交线性替换化实二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 为标准形。

解 二次型f的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-5)$。A的特征值为：2，-1，5。相应的特征向量为：(2，-1，-2)，(2，2，1)，(1，-2，-2)。这三个向量正交，再单位化得：

$$\eta_1=\frac{1}{3}(2,-1,-2),\ \eta_2=\frac{1}{3}(2,2,1),\ \eta_3=\frac{1}{3}(1,-2,-2).$$

从而有正交矩阵 $T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

因此，f 经过正交线性替换 $X=TY$，化为 $f=X'AX=Y'(T'AT)Y$

$2y_1^2-y_2^2+5y_3^2$. 其中$X=(x_1, x_2, x_3)'$，Y类似。

例13 判断实二次型$f=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$是否正定。

解 二次型f的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

$|\lambda E-A|=(\lambda-6)(\lambda^2-12\lambda+27)$，解得，A的特征值：6,3,9. 因此，$f$正定。

八 酉空间的计算题

利用类似于欧氏空间的方法去做。

例14 利用酉线性变换化厄米特二次型$h=x_1\overline{x}_1+4x_2\overline{x}_2+x_3\overline{x}_3+14ix_1\overline{x}_2-14i\overline{x}_1x_2+11\overline{x}_1x_3+11x_1\overline{x}_3+14ix_2\overline{x}_3-14i\overline{x}_2x_3$为标准形。

解 厄米特二次型h的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 14i & 11 \\ -14i & 4 & 14i \\ 11 & -14i & 1 \end{pmatrix},$$

$|\lambda E-A|=(\lambda-12)(\lambda-18)(\lambda+24)$，所以，A的特征值是：12, 18, −24，相应的特征向量分别是：(1,0,1)，(−1,2i,1)，(1,i,−1)，它们两两正交，再单位化，得

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2i, 1), \eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,i,-1).$$

作酉矩阵 $$U=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2i & \sqrt{2}i \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

则在$X=UY$之下，h有标准形$12y_1\overline{y}_1+18y_2\overline{y}_2-24y_3\overline{y}_3$.

I 证明题

一 欧氏空间、子空间

根据欧氏空间的定义验证是否作成欧氏空间.

证明子空间的维数时，一般取正交基，并考虑子空间之间的正交关系.

例 1 设$A=(a_{ij})$是一个n阶正定矩阵，而$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，在$\mathbf{R}^n$中定义$(\alpha,\beta)=\alpha A\beta'$，证明这是$\mathbf{R}^n$的一个内积，从而$\mathbf{R}^n$在该内积下作成一个欧氏空间.

证明 1)由于$\alpha A\beta'$为一阶矩阵，所以$(\alpha A\beta')'=\alpha A\beta'$，即，$\alpha A\beta'=\beta A'\alpha'=\beta A\alpha'$，因此，$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$. 2)对任意$k\in\mathbf{R}$，$(k\alpha,\beta)=(k\alpha)A\beta'=k(\alpha A\beta')=k(\alpha,\beta)$. 3)对任意$\gamma=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbf{R}^n$，$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha+\beta)A\gamma'=\alpha A\gamma'+\beta A\gamma'=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$. 4)由正定二次型的知识，因为A为正定矩阵，所以，当$\alpha\neq0$时，$\alpha A\alpha'>0$. 因此所定义的(α,β)满足内积的条件，从而$\mathbf{R}^n$作成一个欧氏空间.

例 2 设W是$n(n>0)$维欧氏空间V的m维子空间，$M=\{x\mid x\in V且x\perp W\}$，证明M是V的$n-m$维子空间.

证明 易证，M作成V的子空间，从略. 当$m=0$时，$M=V$；当$m=n$时，$M=\{0\}$，结论均成立. 当$0<m<n$时，取W的一正交基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，扩充为V的一正交基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$，由于$\alpha_j\perp\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，所以，$\alpha_j\perp W$，$j=m+1,\cdots,n$，从而M的维数$\geqslant n-m$. 对任意$x\in M$，$x=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+k_{m+1}\alpha_{m+1}+\cdots+k_n\alpha_n$，$(x,\alpha_i)=k_i(\alpha_i,\alpha_i)$，从而$k_i=0$，$i=1,2,\cdots,m$，$x=k_{m+1}\alpha_{m+1}+\cdots+k_n\alpha_n$，所以M的维数$\leqslant n-m$. 因此，M是V的$n-m$维子空间.

二 向量正交、标准正交基

证明向量正交，按照定义计算内积，得到内积为零的结果，即可以.

证明标准正交基，可以按照定义，也可以借助于过渡矩阵，进行证明.

例 3　设A是n阶反对称矩阵，$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是$n$维欧氏空间$R^n$（内积按通常定义）的任一向量，$\beta=\alpha A$，证明$\alpha$与$\beta$正交。

证明　因为，$(\alpha,\beta)=\alpha\beta'=\alpha(\alpha A)'=\alpha(-A\alpha')=-\alpha A\alpha'$，$(\beta,\alpha)=\beta\alpha'=\alpha A\alpha'$，所以$(\alpha,\beta)=-(\beta,\alpha)=-(\alpha,\beta)$。因此，$(\alpha,\beta)=0$，$\alpha$与$\beta$正交。

例 4　设α_1，α_2，…，α_n为n（$n>0$）维欧氏空间V的一组基。证明：这组基是标准正交基的必要充分条件是，对V中任意向量α，都有$\alpha=(\alpha,\alpha_1)\alpha_1+(\alpha,\alpha_2)\alpha_2+\cdots+(\alpha,\alpha_n)\alpha_n$。

证明　先证明必要性。设α_1，α_2，…，α_n为标准正交基，而$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$，则$(\alpha,\alpha_i)=(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n,\alpha_i)=k_i(\alpha_i,\alpha_i)=k_i$。因此，$\alpha=(\alpha,\alpha_1)\alpha_1+(\alpha,\alpha_2)\alpha_2+\cdots+(\alpha,\alpha_n)\alpha_n$。

再证明充分性。设对于V中任意向量α均有$\alpha=(\alpha,\alpha_1)\alpha_1+(\alpha,\alpha_2)\alpha_2+\cdots+(\alpha,\alpha_n)\alpha_n$，则由于$\alpha_i=0\alpha_1+\cdots+1\alpha_i+\cdots+0\alpha_n$，得到$(\alpha_i,\alpha_i)=1$而$i\neq j$时$(\alpha_i,\alpha_j)=0$。因此，$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$为标准正交基。

三　正交变换

关于正交变换的证明，首先要考虑运用正交变换的定义及等价条件；其次，在有限维欧氏空间的情况下，要注意正交变换与正交矩阵的相互转化。

例 5　设σ_1，σ_2是n维欧氏空间V的两个线性变换，且对于任意$\alpha\in V$，有$|\sigma_1(\alpha)|=|\sigma_2(\alpha)|$，证明：存在V的正交变换$\sigma$与$\sigma'$，使$\sigma\sigma_1=\sigma_2$，$\sigma'\sigma_2=\sigma_1$。

证明　只证明$\sigma\sigma_1=\sigma_2$，另一个类似。

设$V_1=\sigma_1(V)$，$V_2=\sigma_2(V)$，并且，设

ϕ：$V_1\to V_2$，$\phi(\sigma_1(\alpha))=\sigma_2(\alpha)$，$\forall\alpha\in V$。

易证ϕ是V_1到V_2的同构映射，从略。

由于 V是n维的，所以，有 $V=V_1\oplus V_1^{\perp}=V_2\oplus V_2^{\perp}$．由于 V_1与 V_2同构，从而维数相同，所以 $V_1^{\perp}$ 与 $V_2^{\perp}$ 的维数相同，从而 $V_1^{\perp}$ 与 $V_2^{\perp}$ 同构。设ψ是 $V_1^{\perp}$ 到 $V_2^{\perp}$ 的一个同构映射。

设 $\sigma: V\to V$，$\forall\alpha\in V$，$\alpha=\alpha_1+\alpha_1'$，$\alpha_1\in V_1$，

$\alpha_1'\in V_1^{\perp}$，$\sigma(\alpha)=\phi(\alpha_1)+\psi(\alpha_1')$，

则易证σ是 V的一个正交变换，从略．且对于任意 $\alpha\in V$，由于 $\sigma_1(\alpha)\in\sigma_1(V)=V_1$，而$\sigma_1(\alpha)=\sigma_1(\alpha)+0$，所以，$(\sigma\sigma_1)(\alpha)=\sigma(\sigma_1(\alpha))=\phi(\sigma_1(\alpha))+\psi(0)=\phi(\sigma_1(\alpha))=\sigma_2(\alpha)$。因此 $\sigma\sigma_1=\sigma_2$。

例 6 证明：第二类正交变换一定有特征值－1。

证明 设σ是$n(n>0)$维欧氏空间 V的一个第二类正交变换，A是σ在 V的某一组标准正交基下的矩阵，则 $|A|=-1$。

设$f(\lambda)=|\lambda E-A|$，则$f(-1)=|(-1)E-A|=|-E-A|=(-1)^n|E+A|$．但是，由于$A'A=E$，所以 $(-1)^n|E+A|=(-1)^n|A'A+A|=(-1)^n|A'+E||A|=(-1)^{n+1}|A+E|$，因此 $|E+A|=0$，$f(-1)=0$，即-1为σ的特征值．

四 正交补

关于正交补的证明题，一般给出有限维欧氏空间的条件，此时，要注意W的正交补$W^{\perp}$的构造，$W^{\perp}$恰由所有与W正交的向量组成．

例 7 设W_1，W_2是$n(n>0)$维欧氏空间 V 的两个子空间，且$W_1\subseteq W_2$，证明$W_2^{\perp}\subseteq W_1^{\perp}$．

证明 对于任意$x\in W_2^{\perp}$，有$x\perp W_2$，由于$W_1\subseteq W_2$，所以$x\perp W_1$。因此，$x\in W_1^{\perp}$，$W_2^{\perp}\subseteq W_1^{\perp}$．

例 8 设σ是$n(n>0)$维欧氏空间 V的正交变换，W是 σ 的不变子空间，证明$W^{\perp}$也是σ的不变子空间。

证明 由于W是σ的不变子空间，所以，σ限制于W上，σ也是W的变换，且是W的正交变换．由于σ是单射，又W为有限维

的，所以σ是满射，从而，对于任意 $x\in W$，有 $y\in W$，使$\sigma(y)=x$。任取$\alpha\in W^{\perp}$，则$(\alpha,y)=0$，从而，$(\sigma(\alpha),x)=(\sigma(\alpha),\sigma(y))=(\alpha,y)=0$，$\sigma(\alpha)\in W^{\perp}$. 因此，$W^{\perp}$也是$\sigma$的不变子空间。

五　对称变换、实对称矩阵

关于对称变换与实对称矩阵的证明题，可以各自独立地进行证明，但是，要注意二者之间的对应关系，在很多情况下，要经过互相转换才便利于证明。

例 9　设$\{A_k\}$是一组两两可交换的n阶实对称矩阵，证明：存在n阶正交矩阵Q，使得$Q'A_kQ(k=1,2,\cdots)$都是对角形矩阵。

证明　对矩阵的阶数n用数学归纳法. 当$n=1$时，显然成立。设$n-1$时成立，考虑n的情况。

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$n$维欧氏空间 V的一组标准正交基，在该基下$A_k$对应的对称变换为$\sigma_k$，则由$A_iA_j=A_jA_i$，得$\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i$，从而易证得$\{\sigma_k\}$有公共特征向量$\beta_1$，且$|\beta_1|=1$，将$\beta_1$扩充为 V的一组标准正交基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，于是，$\sigma_k$在$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}\lambda_k & \\ & B_k\end{pmatrix},\quad k=1,2,\cdots.$$

由σ_k为对称变换知，B_k为实对称矩阵. 由$\{A_k\}$两两可交换知，$\{B_k\}$也两两可交换. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵为$G^{-1}$，则G为正交矩阵，且

$$A_k=G'\begin{pmatrix}\lambda_k & 0\\ 0 & B_k\end{pmatrix}G.$$

由归纳假设，对于$\{B_k\}$，存在正交矩阵P，使 $P'B_kP=C_k(k=1,2,\cdots)$均为对角形矩阵，从而 $A_k=G'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_k & 0\\ 0 & C_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P\end{pmatrix}'G$.

设$Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P\end{pmatrix}'G$，则Q是正交矩阵. 于是 $A_k=Q'\begin{pmatrix}\lambda_k & 0\\ 0 & C_k\end{pmatrix}Q$，或$(Q')^{-1}A_kQ^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_k & 0\\ 0 & C_k\end{pmatrix}$，$Q^{-1}=Q'$，记$T=Q'$，则$T'A_kT$

$=\begin{pmatrix}\lambda_k & 0\\ 0 & C_k\end{pmatrix}$，即 $T'A_kT$ 均为对角形矩阵($k=1,2,\cdots$)．n 的情况成立．根据数学归纳法原理，结论成立．

例10 设A，B均为n阶实对称矩阵，且A为正定矩阵，证明：存在n阶实可逆矩阵T，使 $T'AT$，$T'BT$ 同时为对角形矩阵．

证明 由于A为n阶正定矩阵，所以有n阶实可逆矩阵P，使 $P'AP=E$．对于实对称矩阵 $P'BP$，存在正交矩阵Q，使 $Q'(P'BP)Q$ 为对角形矩阵．记 $T=PQ$，则T为实可逆矩阵，且 $T'AT=Q'(P'AP)Q=Q'EQ=E$，$T'BT=Q'(P'BP)Q$ 均为对角形矩阵．

六 酉空间

关于酉空间的证明题，可以仿照欧氏空间中的对应情况去处理．

例11 证明酉矩阵的特征值的模为1．

证明 设A为n阶酉矩阵．取n维酉空间V的一组标准正交基 ε_1，ε_2，$\cdots$，ε_n，则A在该基下与线性变换σ对应，σ为酉变换．设λ_0为A的一特征值，则λ_0为σ的一特征值．设α是V中属于λ_0的σ的特征向量，即$\sigma(\alpha)=\lambda_0\alpha$，从而 $(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))=(\lambda_0\alpha,\lambda_0\alpha)=\lambda_0\overline{\lambda_0}(\alpha,\alpha)$，$(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))=(\alpha,\alpha)$，$\lambda_0\overline{\lambda_0}(\alpha,\alpha)=(\alpha,\alpha)$，由$\alpha\neq 0$得$(\alpha,\alpha)>0$，从而 $\lambda_0\overline{\lambda_0}=1$，即$\lambda_0$的模为1．

例12 设σ是酉空间V的厄米特变换，λ_0，μ_0是σ的两个不同的特征值，α，β分别为属于λ_0，μ_0的特征向量，证明α与β正交．

证明 $(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma(\beta))$．$(\sigma(\alpha),\beta)=(\lambda_0\alpha,\beta)=\lambda_0(\alpha,\beta)$，$(\alpha,\sigma(\beta))=(\alpha,\mu_0\beta)=\overline{\mu_0}(\alpha,\beta)$．由于厄米特变换的特征值均为实数，所以$\lambda_0(\alpha,\beta)=\mu_0(\alpha,\beta)$，再由$\lambda_0\neq\mu_0$得，$(\alpha,\beta)=0$，即$\alpha$，$\beta$正交．

§5 补充资料

I 格兰姆矩阵、广义阿达马不等式

设V是欧氏空间，α_1，α_2，…，α_s是V中任意s个向量，称s阶矩阵

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_s)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_s)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ (\alpha_s,\alpha_1) & (\alpha_s,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_s,\alpha_s)\end{pmatrix}$$

为α_1，α_2，…，α_s的格兰姆矩阵，称$|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)|$为$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_s$的格兰姆行列式。

设V是欧氏空间，则V中任意s个向量α_1，α_2，…，α_s的格兰姆矩阵$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$必是半正定的。而$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$是正定的必要充分条件是$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_s$线性无关。

欧氏空间V中任意s个向量α_1，α_2，…，α_s的格兰姆矩阵的任何顺序主子式都是非负数，当且仅当α_1，α_2，…，α_s线性无关时$|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)|>0$．

当对α_1，α_2，…，α_s施行施密特正交化（不单位化）过程时$|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)|$的值不变.即，若$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_s$经过正交化过程后化为$\beta_1$，$\beta_2$，…，$\beta_s$，则$|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)|=|G(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)|=(\beta_1,\beta_1)(\beta_2,\beta_2)\cdots(\beta_s,\beta_s)$。

在三维几何空间中，$|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)|$的几何解释：1）当$s=2$时，$|G(\alpha_1,\alpha_2)|=\begin{vmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2)\end{vmatrix}=(\alpha_1,\alpha_1)\cdot(\alpha_2,\alpha_2)-(\alpha_1,\alpha_2)^2=|\alpha_1|^2|\alpha_2|^2-|\alpha_1|^2|\alpha_2|^2\cos^2\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=|\alpha_1|^2|\alpha_2|^2\sin^2\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=|\alpha_1\times\alpha_2|^2$，从而，$|G(\alpha_1,\alpha_2)|$是以向量$\alpha_1$，$\alpha_2$为邻边的平行四边形面积的平方；2)当$s=3$时，$|G(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)|$的绝对值是以$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$为邻边的平行六面

体的体积的平方.

广义阿达马不等式. 对欧氏空间V中任意s个向量α_1, α_2, $\cdots$, α_s, 必有$|G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)| \leqslant \prod_{i=1}^{s}(\alpha_i, \alpha_i)$, 而等号成立的必要充分条件是$(\alpha_i, \alpha_j)=0$, $i \neq j$, i, $j=1,2,\cdots,s$.

设$A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是$n$阶实矩阵, 则$|A|^2=|A'A|=|G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\alpha_i'\alpha_i=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)$. 这就是通常的阿达马不等式.

设α_1, α_2, $\cdots$, α_s是欧氏空间V中的任意s个向量, 则对任何正整数k, s阶矩阵

$$A(k)=\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1)^k & (\alpha_1,\alpha_2)^k & \cdots & (\alpha_1,\alpha_s)^k \\ (\alpha_2,\alpha_1)^k & (\alpha_2,\alpha_2)^k & \cdots & (\alpha_2,\alpha_s)^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_s,\alpha_1)^k & (\alpha_s,\alpha_2)^k & \cdots & (\alpha_s,\alpha_s)^k \end{pmatrix}$$

必是半正定的. 当$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关时, $A(k)$必是正定的.

Ⅱ 共轭变换、正规变换

设σ是n维酉空间V的一个线性变换. 若有V的线性变换τ, 使得对任意α, $\beta \in V$, 有$(\sigma(\alpha), \beta)=(\alpha, \tau(\beta))$, 则称$\tau$是$\sigma$的一个共轭变换.

若σ有共轭变换, 则唯一, 记为σ^*.

设σ是n维酉空间V的线性变换, σ^*存在. 若σ在V的标准正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵为A, 则$\sigma^*$在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵为$\overline{A}'$. 反之亦然.

共轭变换有如下关系式: 1) $Te^*=Te$; 2) $(\sigma^*)^*=\sigma$; 3) $(\lambda\sigma)^*=\overline{\lambda}\sigma^*$; 4) $(\sigma+\tau)^*=\sigma^*+\tau^*$; 5) $(\sigma\tau)^*=\tau^*\sigma^*$.

设σ是n维酉空间V的线性变换, σ^*存在. 若$\sigma\sigma^*=\sigma^*\sigma$, 则称$\sigma$是一个正规变换.

设σ是酉空间V的一个正规变换, 而λ_0是σ的一个特征值, α

是属于λ_0的特征向量，则α是σ^*的属于特征值$\overline{\lambda_0}$的特征向量。

设σ是酉空间V的一个正规变换，则σ的属于不同特征值的特征向量必正交。

设σ是n维酉空间V的一个正规变换，则在V中存在一组标准正交基，使σ在该组基下的矩阵是对角形矩阵。

Ⅱ 一般变换的分解

一 分解为对称与反对称部分的分解式

酉空间的每一个线性变换σ都可以表示为$\sigma=\sigma_1+i\sigma_2$的形状，$\sigma_1$，$\sigma_2$为对称变换，且表法是唯一的。

实际上，$\sigma_1=\frac{1}{2}(\sigma+\sigma^*)$，$\sigma_2=\frac{1}{2i}(\sigma-\sigma^*)$。

二 极式分解

酉空间V的每一个线性变换σ均有极分解式$\sigma=\sigma_1\sigma_2$，其中σ_1是非负对称变换，σ_2是酉变换。σ_1是唯一确定的；若σ是满秩的，则σ_2也是唯一确定的。

三 凯莱变换

若σ为酉空间V的对称变换，则变换$\sigma\pm i\mathrm{Te}$有逆变换存在；由式$\tau=(\sigma-i\mathrm{Te})(\sigma+i\mathrm{Te})^{-1}$所定出的变换$\tau$为一酉变换，它没有等于1的特征值，且$\sigma$可以经过$\tau$表示为$\sigma=-i(\tau+\mathrm{Te})(\tau-\mathrm{Te})^{-1}$。反之，若$\tau$为一酉变换，没有等于1的特征值，则$\tau-\mathrm{Te}$有逆变换存在，由$\sigma=-i(\tau+\mathrm{Te})(\tau-\mathrm{Te})^{-1}$所确定的$\sigma$是对称变换，且$\tau$可经$\sigma$表为$\tau=(\sigma-i\mathrm{Te})(\sigma+i\mathrm{Te})^{-1}$。

反对称变换时，有：

$\tau=(\sigma-\mathrm{Te})(\sigma+\mathrm{Te})^{-1}$，$\sigma=-(\tau+\mathrm{Te})(\tau-\mathrm{Te})^{-1}$。

四 影谱分解

设σ是酉空间V的线性变换。若$\sigma=\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2+\cdots+\alpha_s\tau_s$，并且：1)数$\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots,\alpha_s$互不相等；2)$\tau_j^*=\tau_j\neq \mathrm{T}_0$，$j=1,2,\cdots,s$；3)$\tau_j^2=\tau_j$，$j=1, 2, \cdots, s$；4)$\tau_j\tau_k=\mathrm{T}_0$，$j$，$k=1$，

2，…，s，$j\neq k$；5)$\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_s=\mathrm{Te}$；则称该式是$\sigma$的影谱分解。

酉空间V的线性变换σ有影谱分解式⇔σ是正规变换。

若$\sigma=\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2+\cdots+\alpha_s\tau_s$为$\sigma$的影谱分解式，则$\alpha_1,\alpha_2$，…，$\alpha_s$为$\sigma$的所有特征值。

酉空间的每一正规变换有且仅有一个影谱分解式。

Ⅳ　历史资料点滴

关于柯西-布涅柯夫斯基不等式：1821年，对于$\mathbf{R}^n$，柯西证明了在一般情形的这一不等式；1859年，俄国数学家布涅柯夫斯基证明并系统地应用了这一不等式；1885年，施瓦兹才首次遇到这个不等式。

凯莱于1843年通过与普通解析几何作形式的类比的途径，介绍了n维空间的概念．德国著名数学家格拉斯曼（1809,4,15—1877,9,26）在1844年发表《线性扩张论》一书，引入欧几里得多维空间的概念，把点、直线、平面、两点之间的距离等概念推广到任意的$\mathbf{R}^n$。1862年格拉斯曼发表了修订版，称为《扩张论》，详细地叙述了他原来的工作，是以严格的欧几里得式写出的，建立了一种n维空间的几何学．1844年、1845年和1847年，格拉斯曼、柯西等数学家分别提出了脱离一切空间直观的、成为一个纯粹数学概念的n维空间的概念。格拉斯曼首次提出了关于多维欧几里得空间理论的系统学说，引入了向量的数量积。

1801—1802年间，法国数学家阿歇特（1769—1834）、蒙日（1746—1818）、泊松（1781—1840）证明了三个变数的实二次型的特征值的实性。1829年柯西在他的《数学练习》中证明了，任意n阶实对称矩阵都有实特征值，1834年雅可比重复了这一结果，但是，他们都排除了相等特征值的情况．

1855年，法国数学家厄米特（1822—1901）证明了，若M是n阶复矩阵，且$M=M^*$，则其特征值都是实数，这里M^*是将M

的每个元素用它的共轭复数代替后，再转置得到的矩阵，而M称为厄米特矩阵。后来，德国数学家克雷卜什（1833—1872）由厄米特的结果导出，实反对称矩阵的非零特征值是纯虚数；布克海姆（1859—1888）证明了，若M是对称的，且元素是实数，则特征值是实数。

虽然，早在1854年，厄米特就使用了正交矩阵这个术语；但是，直到1878年，弗罗宾纽斯才发表正交矩阵的正式定义：n阶实矩阵M是正交的，若它等于它的转置矩阵的逆，即，$M=(M')^{-1}$，他还证明了$(A^{-1})'=(A')^{-1}$，并研究了合同矩阵。

1805年，法国数学家勒让德（1752，9，18—1833，1，10）在他的著作《确定彗星轨道的新方法》中，发表了最小二乘法，称之为“最小平方数法”，最先将这个方法提炼成形，给出了一个使用这个方法的例子，对这个方法作了一个清楚的解释，引起数学界的注目。1808年底或1809年初，美国数学家亚居伦也发表了这一方法。然而，实际上，高斯早在1795年就发现了最小二乘法，但直到1809年才在其《天体运动理论》中发表。拉普拉斯在他的《概率的分析理论》中提出了最小二乘法的第一个证明。

§6 基本习题

1 在欧氏空间$\mathbf{R}^4$(内积按通常定义)中，已知$\alpha=(1，2，-1，1)$，$\beta=(2，3，1，-1)$，$\gamma=(-1，-1，-2，2)$，试求α，β，γ的长度，每两个向量的内积与夹角。

2 在欧氏空间$\mathbf{R}^4$(内积按通常定义)中，求一单位向量，使它同时与向量$\alpha_1=(1，1，-1，1)$，$\alpha_2=(1，-1，-1，1)$，$\alpha_3=(2，1，1，3)$中的每一个都正交。

3 在$\mathbf{R}[x]_4$中定义内积为$(f，g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$，试由基$1，x，x^2，x^3$出发作正交化，求$\mathbf{R}[x]_4$的一组标准正交基。

4　对于实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，试求正交矩阵T，使$T'AT=T^{-1}AT$为对角形矩阵。

5　试判断实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+x_1x_3$是否正定。

6　设W是欧氏空间V的子空间，且$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$。若$\alpha\perp\alpha_i$，$i=1, 2,\cdots, s$，证明$\alpha\perp W$。

7　设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是欧氏空间V的一组基，任意$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$，$\beta=y_1\alpha_1+\cdots+y_n\alpha_n$，证明：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是V的一组标准正交基$\Leftrightarrow(\alpha, \beta)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$。

8　设A是实对称矩阵，S是实反对称矩阵，且$AS=SA$，$A-S$可逆，证明：$G=(A+S)(A-S)^{-1}$是正交矩阵。

9　设σ是$n(n>0)$维欧氏空间V的对称变换，且$\sigma^2=\sigma$，证明：存在V的一组标准正交基，使σ在该组基下的矩阵是〔1,…,1,0,…,0〕。

10　证明酉空间的两组标准正交基之间的过渡矩阵是酉矩阵。

第十章　双线性函数

§1　概括说明

作为二次型、欧氏空间(酉空间)的内积的发展,就导致一般的双线性函数的概念.双线性函数的进一步发展，则是三重线性型及更一般的多重线性型,总括起来,成为线性代数学的一个重要部分，称为型论。在数学、物理学、工程科学等的许多领域中，型论具有重要意义。

借助于双线性函数,就能定义一般的双线性度量空间,从而引进多种空间,如伪欧氏空间等,作为欧氏空间(酉空间)的进一步的发展。同样地，在数学、物理学、工程科学的许多领域中，这些空间具有重要意义,例如,四维伪欧氏空间（物理学称之为闵可夫斯基空间）是狭义相对论所必须的。

本章的内容分为六个部分：线性函数，对偶空间，双线性函数，对称双线性函数，反对称双线性函数，伪欧氏空间。

数域F上的线性空间V的线性函数,是本章中的重要的概念。

数域F上的线性空间V的所有线性函数作成F上的线性空间L（F，V），称为V的对偶空间。

双线性函数是本章中的又一个重要概念。

对称双线性函数是一类重要的双线性函数。

反对称双线性函数是另一类重要的双线性函数。

利用双线性函数引进双线性度量空间及伪欧氏空间。

本章的补充资料是：复欧氏空间，辛空间，多重线性代数，历史资料点滴。

§2 内容提要

Ⅰ 线性函数

设V是数域F上的一个线性空间，f是V到F的一个映射．若对于任意α，$\beta\in$V 及任意 $k\in$F，均成立：1）$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$，2）$f(k\alpha)=kf(\alpha)$， 则称$f$是V上的一个线性函数．

设f是线性空间V上的一个线性函数．若对于任意$\alpha\in$V，均有$f(\alpha)=0$，则称f是零函数．

线性函数具有下列简单性质：1）$f(0)=0$，$f(-\alpha)=-f(\alpha)$；2）若$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$，则$f(\beta)=k_1f(\alpha_1)+k_2f(\alpha_2)+\cdots+k_sf(\alpha_s)$．

设$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$a_i(i=1,2,\cdots,n)$是F中确定的数，则$f(X)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$是$F^n$上的一个线性函数．

设V是数域F上的一个n 维线性空间，ε_1，ε_2，…，ε_n是V的一组基，a_1，a_2，…，a_n是F中任意n个数，则存在唯一的V上的线性函数f，使得$f(\varepsilon_i)=a_i$，$i=1$，2，…，n．

Ⅱ 对偶空间

V是数域F上的n维线性空间，V上全体线性函数组成的集合记作 L(V，F)．对于f，$g\in$L(V,F)及$k\in$F，由$(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha)(\alpha\in$V)所定义的$f+g$是V上的线性函数，称为$f$与$g$的和；由$(kf)(\alpha)=k(f(\alpha))(\alpha\in$V)所定义的$kf$是V上的线性函数，称为$k$与$f$的数量乘积．L(V，F)对于如此定义的加法和数量乘法作成F上的线性空间，称为V的对偶空间，也简单地记作V*．

取定V的一组基ε_1，ε_2，…，ε_n，作V上的n个线性函数f_1，f_2，…，f_n，使得

$$f_i(\varepsilon_j)=\begin{cases}1, & j=i;\\ 0, & j\neq i.\end{cases}\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

则对于任意的$\alpha\in V$，有$\alpha=\sum_{i=1}^{n}f_i(\alpha)\varepsilon_i$；而对于任意的$f\in V^*$，有$f=\sum_{i=1}^{n}f(\varepsilon_i)f_i$。并且，$f_1$，$f_2$，…，$f_n$作成$V^*$的一组基，从而，$V^*$是$n$维的，上面的$V^*$的基$f_1$，$f_2$，…，$f_n$称为V的基$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$，…，$\varepsilon_n$的对偶基。

设ε_1，ε_2，…，ε_n及η_1，η_2，…，η_n是线性空间V的两组基，而f_1，f_2，…，f_n及g_1，g_2，…，g_n分别是它们的对偶基.若ε_1 ε_2，…，ε_n到η_1，η_2，…，η_n的过渡矩阵是A，则f_1，f_2，…f_n到g_1，g_2，…，g_n的过渡矩阵是$(A')^{-1}$.

V是一个有限维线性空间，V^{**}是V的对偶空间V^*的对偶空间。取定$x\in V$，定义V^*的一个函数x^{**}为：$x^{**}(f)=f(x)$ $(f\in V^*)$，则V到V^{**}的映射$x\to x^{**}$是一个同构映射。

于是，线性空间V也可看成V^*的线性函数空间，实际上，V与V^*是互为线性函数空间的，对偶空间的名称如此而来。由此，任一n维线性空间都可以看成某个线性空间的线性函数所成的空间，这一看法在多重线性代数中是很重要的。

Ⅱ　双线性函数

V是数域**F**上的线性空间，$f(\alpha,\beta)$是V上的一个二元函数，即，对于任意α，$\beta\in V$，根据法则f都唯一地对应**F**中的一数$f(\alpha,\beta)$。若对于任意α_1，α_2，α，β_1，β_2，$\beta\in V$，任意k_1，$k_2\in$ **F**，均成立：

1）$f(\alpha,k_1\beta_1+k_2\beta_2)=k_1f(\alpha,\beta_1)+k_2f(\alpha,\beta_2)$；

2）$f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta)$，

则称$f(\alpha,\beta)$为V上的一个双线性函数。

设$\mathbf{F}^n$是数域**F**上n维列向量构成的线性空间，A是**F**上的一个n阶矩阵。对于X，$Y\in\mathbf{F}^n$，定义$f(X,Y)=X'AY$，则$f(X,Y)$是**F**上的一个双线性函数。

设V是数域**F**上的n维线性空间，ε_1，ε_2，…，ε_n是V的一组基，$f(\alpha, \beta)$是V上的一个双线性函数，则称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1, \varepsilon_1) & f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \cdots & f(\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ f(\varepsilon_2, \varepsilon_1) & f(\varepsilon_2, \varepsilon_2) \cdots & f(\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \cdots & \cdots \quad \cdots & \cdots \\ f(\varepsilon_n, \varepsilon_1) & f(\varepsilon_n, \varepsilon_2) \cdots & f(\varepsilon_n, \varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

为$f(\alpha, \beta)$在基ε_1，ε_2，…，ε_n下的度量矩阵。

在给定的基下，V上全体双线性函数与**F**上全体n阶矩阵之间有一个双射，并且保持加法与数量乘法。

同一个双线性函数在不同基下的度量矩阵是合同的。

设$f(\alpha, \beta)$是线性空间V上的一个双线性函数.若由$f(\alpha,\beta)=0$对任意$\beta\in V$成立可推出$\alpha=0$，则称f是非退化的。双线性函数$f(\alpha, \beta)$非退化当且仅当其度量矩阵A是非退化矩阵。

Ⅳ　对称双线性函数

设$f(\alpha, \beta)$是线性空间V上的一个双线性函数。若对于任意的α，$\beta\in V$，都有$f(\alpha, \beta)=f(\beta, \alpha)$，则称$f(\alpha, \beta)$为对称双线性函数。

双线性函数是对称的，当且仅当它在任一组基下的度量矩阵是对称的。

设V是数域**F**上的$n(>0)$维线性空间，$f(\alpha, \beta)$是V上的对称双线性函数，则存在V的一组基ε_1，ε_2,…，ε_n,使$f(\alpha, \beta)$在这组基下的矩阵为对角矩阵。从而，对于V中任意向量$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$，$\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n$，有$f(\alpha,\beta)=d_1x_1y_1+d_2x_2y_2+\cdots+d_nx_ny_n$，其中$d_1,d_2,\cdots$，$d_n\in$**F**。

设V是复数域**C**上的$n(>0)$维线性空间，$f(\alpha, \beta)$是V上的对称双线性函数，则存在V的一组基ε_1，ε_2，…，ε_n，对于V中任意向量$\alpha=x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n$，$\beta=y_1\varepsilon_1+\cdots+y_n\varepsilon_n$，有$f(\alpha, \beta)=x_1y_1+\cdots+x_ry_r(0\leqslant r\leqslant n)$。

设V是实数域R上的$n(>0)$维线性空间，$f(\alpha,\beta)$是V上的对称双线性函数，则存在V的一组基ε_1，ε_2，$\cdots,\varepsilon_n$，对于V中任意向量$\alpha=x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n$，$\beta=y_1\varepsilon_1+\cdots+y_n\varepsilon_n$，有$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+\cdots+x_py_p-x_{p+1}y_{p+1}-\cdots-x_ry_r(0\leqslant p\leqslant r\leqslant n)$。

若V上的对称双线性函数$f(\alpha,\beta)$是非退化的，则有V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，满足

$$\begin{cases}f(\varepsilon_i,\varepsilon_i)\neq 0, & i=1,2,\cdots,n;\\ f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0, & i\neq j.\end{cases}$$

这样的基称为V的对于$f(\alpha,\beta)$的正交基。

设V是数域F上的线性空间，$f(\alpha,\beta)$是V上的双线性函数．当$\alpha=\beta$时，V上的函数$f(\alpha,\alpha)$称为与$f(\alpha,\beta)$对应的二次齐次函数．

若两个双线性函数的度量矩阵分别为n阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 及$B=(b_{ij})$，则，只要$a_{ij}+a_{ji}=b_{ij}+b_{ji}$，$i,j=1,2,\cdots,n$，它们所对应的二次齐次函数就相同，从而，可以多个双线性函数对应于同一个二次齐次函数．但是，当双线性函数是对称的时，一个二次齐次函数恰对应一个对称双线性函数。

V　反对称双线性函数

设$f(\alpha,\beta)$是线性空间V上的一个双线性函数．若对于任意的$\alpha,\beta\in V$，都有$f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$，则称$f(\alpha,\beta)$为反对称双线性函数。

双线性函数是反对称的，当且仅当它在任一组基下的度量矩阵是反对称的。

设$f(\alpha,\beta)$是$n(>0)$维线性空间V上的反对称双线性函数，则存在V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_{-1},\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{-r}$，$\eta_1,\cdots,\eta_s$，使得

$$\begin{cases}f(\varepsilon_i,\varepsilon_{-i})=1, & i=1,\cdots,r;\\ f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0, & i+j\neq 0;\\ f(\alpha,\eta_k)=0, & \alpha\in V,k=1,\cdots,s.\end{cases}$$

若V上的反对称双线性函数$f(\alpha,\beta)$是非退化的，则有V的一

组基$\varepsilon_1,\varepsilon_{-1},\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{-r}$，使得

$$\begin{cases} f(\varepsilon_i,\varepsilon_{-i})=1, & i=1,2,\cdots,r; \\ f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0; & i+j\neq 0. \end{cases}$$

从而，V的维数一定是偶数。

Ⅵ　伪欧氏空间

一　双线性度量空间

设V是数域**F**上的一个线性空间，在V上定义了一个非退化的双线性函数，则称V为一个双线性度量空间。

在讨论双线性度量空间的度量性质时，一般的“长度”、“夹角”等概念很难推广进去，但是，“正交性”、“正交基”、保持该双线性函数的线性变换等问题，还是可以研究的。

二　伪欧氏空间

设V为实数域**R**上的一个n维线性空间，在V上定义了一个非退化对称双线性函数$f(\alpha,\beta)$，则称V为一个伪欧氏空间，或准欧氏空间。

在V中可以找到一组基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，使$f(\alpha,\beta)$在该组基下的矩阵为$G=[1,\cdots,1,-1,\cdots,-1]$，其中有$p$个1，$n-p$个$-1$，称$2p-n$为该伪欧氏空间V的符号差，称$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$为V的一组规范基。在规范基下，二次齐次函数$f(\alpha,\alpha)$成规范形。

设σ是n维伪欧氏空V的一个线性变换.若对于任意$\alpha,\beta\in$ V，都有$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$，则称$\sigma$是一个正交变换。

n维伪欧氏空间V的线性变换σ是一个正交变换$\Leftrightarrow\sigma$在V的一组规范基下的矩阵A满足关系式$A'GA=G$，其中G为该规范基的度量矩阵。

设$O_n(V)$是n维伪欧氏空间V的全体正交变换的集合，则$O_n(V)$具有如下性质：1）$Te\in O_n(V)$；2）若$\sigma_1,\sigma_2\in O_n(V)$，则$\sigma_1\sigma_2\in O_n(V)$；3）若$\sigma\in O_n(V)$，则$\sigma$可逆，且$\sigma^{-1}\in O_n(V)$。

§3 重点难点

本章的主题词是：线性函数，对偶空间，对偶基，双线性函数，双线性函数的度量矩阵，非退化双线性函数，对称双线性函数，反对称双线性函数，双线性度量空间，伪欧氏空间。

本章的基本方法是：函数值计算方法，线性（双线性）函数确定方法，对偶基求法，度量矩阵求法，正交基求法。

本章的重点是：线性函数，对偶空间，对称双线性函数。

线性函数是本章中出现的第一个概念；线性函数是构成对偶空间的基础；双线性函数在一定意义上，对于一个向量而言，就是线性函数，因此，线性函数成为本章的一个重点。

对偶空间是本章中出现的又一个概念，在多重线性代数中起着基本的作用；对偶基是一个基本的工具；就一定意义说来，任一n维线性空间均可以看成某个线性空间的对偶空间，因此，对偶空间成为本章的一个重点。

对称双线性函数是一类最重要的双线性函数，具有较多的性质，并且已被详细研究；对称双线性函数与二次齐次函数(二次型)有密切的联系；非退化对称双线性函数作为欧氏空间的内积的自然推广，并且由此产生了伪欧氏空间，因此，对称双线性函数成为本章的一个重点。

本章的难点是：对偶空间，反对称双线性函数，伪欧氏空间。

对偶空间既是本章的一个重点，又是本章的一个难点，原因在于：1）对偶空间的向量是线性函数，从而使对偶空间成为层次较高的概念；2）对偶基较抽象，且有关的计算较复杂；3）V，V^*，V^{**}三者之间的关系，尤其V与V^{**}的同构，较难理解。解决困难的方法是：1）熟悉线性函数的概念及例子；2）具体地计算对偶基，以理解其意义；3）由$(A')'=A$，$(A^{-1})^{-1}=A$等类比地理解V^{**}与V的关系。

反对称双线性函数成为本章的一个难点，原因在于：1）对应的基较复杂；2）非退化的情况与空间的维数有关。解决困难的方法是：1）注意反对称双线性函数与反对称矩阵的关系；2）注意反称双线性函数与对称双线性函数的联系与区别。

伪欧氏空间成为本章的一个难点，原因在于：1）实际的模型（闵可夫斯基空间）不容易理解；2）规范基的推证较复杂。解决困难的方法是：1）用欧氏空间作类比；2）注意实对称矩阵的有关结论及其应用。

§4 习题类解

I 计算题

一 求函数值

可以分为两种类型：1）求线性函数的函数值；2）求双线性函数的函数值。解决的一般方法是：先确定基向量的函数值，再计算一般向量的函数值。

例1 设V是F上的3维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是V的一组基，$f$是V上的一个线性函数。已知$f(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=1, f(\varepsilon_2-2\varepsilon_3)=-1$，$f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=-3$，试求$f(\alpha)$，其中$\alpha$是V中任意向量。

解 由已知条件 得到

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_3)=1 \\ f(\varepsilon_2)-2f(\varepsilon_3)=-1 \\ f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_2)=-3, \end{cases}$$

解得，$f(\varepsilon_1)=4$，$f(\varepsilon_2)=-7$，$f(\varepsilon_3)=-3$。设$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3$，则$f(\alpha)=x_1f(\varepsilon_1)+x_2f(\varepsilon_2)+x_3f(\varepsilon_3)=4x_1-7x_2-3x_3$。

例2 设V是数域F上的2维线性空间，ε_1，ε_2是V的一组基。已知$f(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_1-\varepsilon_2)=1, f(\varepsilon_1,\varepsilon_1+\varepsilon_2)=-1, f(\varepsilon_2,\varepsilon_1)=1$，$f(\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_2)=2$，$\alpha=2\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\beta=\varepsilon_1+3\varepsilon_2$，试求

$f(\alpha,\beta)$，其中f是V上的双线性函数。

解 由已知条件，得到

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)-f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)+f(\varepsilon_2,\varepsilon_1)-f(\varepsilon_2,\varepsilon_2)=1 \\ f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)+f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=-1 \\ f(\varepsilon_2,\varepsilon_1)=1 \\ f(\varepsilon_2,\varepsilon_1)+f(\varepsilon_2,\varepsilon_2)=2, \end{cases}$$

解得，$f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)=0, f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=-1, f(\varepsilon_2,\varepsilon_1)=1$；$f(\varepsilon_2,\varepsilon_2)=1$。从而$f(\alpha,\beta)=(2\ \ 1)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}=-2$。

二　确定函数

要确定一个线性函数或双线性函数，只要确定一组基向量的函数值。

例 3　设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是数域**F**上的线性空间V的一组基，试求V上的一个线性函数f，使得$f(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=f(\varepsilon_1-2\varepsilon_3)=0$，$f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=1$。

解 由条件得到，

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_3)=0 \\ f(\varepsilon_1)-2f(\varepsilon_3)=0 \\ f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_2)=1 \end{cases}$$

解得，$f(\varepsilon_1)=f(\varepsilon_3)=0$，$f(\varepsilon_2)=1$。对于V中的任意向量$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3$，$f(\alpha)=x_1f(\varepsilon_1)+x_2f(\varepsilon_2)+x_3f(\varepsilon_3)=x_2$。

三　求对偶基

可以分为两种类型：1）由V的基求V*的基，使成对偶；2）由V*的基求V的基，使成对偶。解决的方法是：1）用对偶基的定义直接求；2）通过过渡矩阵求。

例 4　设$V=\mathbf{F}[x]_2$，对于$p(x)=c_0+c_1x\in V$，$f_1(p(x))=\int_0^2 p(x)dx$，$f_2(p(x))=\int_0^1 p(x)dx$，试求V的一组基$p_1(x)$，$p_2(x)$，使$f_1$，$f_2$是它的对偶基。

解 设$p_1(x)=c_0+c_1x$，$p_2(x)=d_0+d_1x$，则由对偶基的定义得

$$\begin{cases} f_1(p_1(x))=\int_0^2 p_1(x)dx=2c_0+2c_1=1 \\ f_1(p_2(x))=\int_0^2 p_2(x)dx=2d_0+2d_1=0 \\ f_2(p_1(x))=\int_0^1 p_1(x)dx=c_0+\frac{1}{2}c_1=0 \\ f_2(p_2(x))=\int_0^1 p_2(x)dx=d_0+\frac{1}{2}d_1=1 \end{cases}.$$

解得，$c_0=-\frac{1}{2}$，$c_1=1$，$d_0=2$，$d_1=-2$。从而，$p_1(x)=-\frac{1}{2}+x$，$p_2(x)=2-2x$，f_1，f_2是$p_1(x)$，$p_2(x)$的对偶基。

例 5 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是线性空间V的基，$f_1,f_2,f_3$是它的对偶基，$\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_3$，$\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，$\alpha_3=\varepsilon_2+\varepsilon_3$是V的另一组基，试求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的对偶基$g_1,g_2,g_3$。

解 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵为A，由定理知，$f_1,f_2,f_3$到$g_1,g_2,g_3$的过渡矩阵为$(A')^{-1}$。而

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad (A')^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

所以，$g_1=f_2-f_3$，$g_2=f_1-f_2+f_3$，$g_3=-f_1+2f_2-f_3$。

四 求度量矩阵

求度量矩阵的方法是：1）用定义求；2）通过两组基的过渡矩阵求。

例6 在F^2中定义双线性函数$f(X,Y)$，对于$X=(x_1,x_2)$，$Y=(y_1,y_2)$，$f(X,Y)=2x_1y_1-3x_1y_2+x_2y_2$。

1）给定F^2的一组基$\varepsilon_1=(1,0)$，$\varepsilon_2=(1,1)$，求$f(X,Y)$在该组基下的度量矩阵；

2）另取一组基η_1,η_2，满足$(\eta_1,\eta_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)T$，$T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，求$f(X,Y)$在$\eta_1,\eta_2$下的度量矩阵。

解 1）由$f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)=2-0+0=2$，$f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=2-3+0=-1$，$f(\varepsilon_2,\varepsilon_1)=2-0+0=2$，$f(\varepsilon_2,\varepsilon_2)=2-3+1=0$得，$f(X,Y)$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2$下的度量矩阵是$A=\begin{pmatrix}2&-1\\2&0\end{pmatrix}$.

2）$f(X,Y)$在η_1,η_2下的度量矩阵是$T'AT=\begin{pmatrix}3&9\\0&6\end{pmatrix}$.

Ⅱ 证明题

一 函数及其性质

根据定义证明所给的函数是线性函数、双线性函数、对称双线性函数等。根据定义及有关结论证明函数具有某种性质。

例 1 设A是$\mathbf{F}$上的一个m阶矩阵，定义$\mathbf{F}^{m\times n}$上的一个二元函数$f(X,Y)=T_r(X'AY)$，对于$X,Y\in\mathbf{F}^{m\times n}$，证明$f(X,Y)$是$\mathbf{F}^{m\times n}$上的双线性函数。

证明 对于$X_1,X_2\in\mathbf{F}^{m\times n}$，$k_1,k_2\in\mathbf{F}$，成立$f(k_1X_1+k_2X_2,Y)=T_r((k_1X_1+k_2X_2)'AY)=T_r(k_1X_1'AY+k_2X_2'AY)=T_r(k_1X_1'AY)+T_r(k_2X_2'AY)=k_1T_r(X_1'AY)+k_2T_r(X_2AY)=k_1f(X_1,Y)+k_2f(X_2,Y)$.
类似地，有$f(X,k_1Y_1+k_2Y_2)=k_1f(X,Y_1)+k_2f(X,Y_2)$．因此，$f(X,Y)$是双线性函数。

例 2 设V是一个线性空间，$f_1,f_2,\cdots,f_s$是V^*中非零向量，证明存在$\alpha\in V$，使$f_i(\alpha)\neq0$，$i=1,2,\cdots,s$。

证明 对函数的个数s作数学归纳法。

当$s=1$时，显然成立。设$s-1$时成立，考虑s的情况。对于$f_1,\cdots,f_{s-1}$用归纳假设，有$\alpha\in V$，使$f_i(\alpha)\neq0$，$i=1,\cdots,s-1$。若$f_s(\alpha)\neq0$，则结论成立。若$f_s(\alpha)=0$，则有$\beta\in V$，使$f_s(\beta)\neq0$。在$\alpha+\beta$，$2\alpha+\beta,\cdots$，$s\alpha+\beta$中，必有$t\alpha+\beta(1\leqslant t\leqslant s)$，使$f_i(t\alpha+\beta)\neq0$，$i=1,\cdots,s-1$。若不然，则有$l$，$k$，$1\leqslant l<k\leqslant s$，及$f_i$使得$f_i(l\alpha+\beta)=f_i(k\alpha+\beta)=0$，从而$(k-l)f_i(\alpha)=0$，$f_i(\alpha)=0$，引出矛盾。又，$f_s(t\alpha+\beta)=$

$tf_s(\alpha)+f_s(\beta)=f_s(\beta)\neq 0$，所以$f_i(t\alpha+\beta)\neq 0$，$i=1,\cdots,s$，结论同样成立。

二 线性空间的同构

按照同构的定义，如同前面的几章中那样，进行证明. 在有限维的情况下，可以利用 V与 V*同构的定理，或者利用 V与 V*同构的证明方法。

例 3 设$f(\alpha,\beta)$是n维线性空间 V上的非退化对称双线性函数，对 V中的一个元素α，定义 V*中一个元素 α^*： $\alpha^*(\beta)=f(\alpha,\beta)$，$\beta\in$ V. 证明 V到 V*的映射$\alpha\to\alpha^*$是一个同构映射。

证明 易知，α^*是 V上的线性函数，从而，$\alpha\to\alpha^*$是 V到 V*的映射。

对于$\alpha_1,\alpha_2\in$ V，$\alpha_1\neq\alpha_2$，由于$f(\alpha,\beta)$是非退化的，所以有$\beta\in$ V，使$f(\alpha_1-\alpha_2,\beta)\neq 0$，从而$f(\alpha_1,\beta)\neq f(\alpha_2,\beta)$，$\alpha_1^*(\beta)\neq\alpha_2^*(\beta)$，$\alpha_1^*\neq\alpha_2^*$，$\alpha\to\alpha^*$是单射。

对于$\alpha_1,\alpha_2\in$ V，$k\in$ **F**，$(\alpha_1+\alpha_2)^*(\beta)=f(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=f(\alpha_1,\beta)+f(\alpha_2,\beta)=\alpha_1^*(\beta)+\alpha_2^*(\beta)$，$(k\alpha_1)^*(\beta)=f(k\alpha_1,\beta)=k\alpha_1^*(\beta)$。

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为 V的一组基，则其象 $\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_n^*$为 V*的一组基. 事实上，对于$k_1,k_2,\cdots,k_n\in$ **F**， $k_1\alpha_1^*+k_2\alpha_2^*+\cdots+k_n\alpha_n^*=0^*$，则由$\alpha\to\alpha^*$是单射知，$0\to 0^*$， 从而 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$，$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$。又， V*是$n$ 维 的. 对任意$\alpha^*\in$ V*，$\alpha^*=l_1\alpha_1^*+l_2\alpha_2^*+\cdots+l_n\alpha_n^*$，有$\alpha=l_1\alpha_1+\cdots+l_n\alpha_n\in$ V，而$\alpha\to\alpha^*$，因此$\alpha\to\alpha^*$是满射.

综上所述，$\alpha\to\alpha^*$是同构映射.

例 4 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是$n$维线性空间 V中非零向量，证明有$f\in$ V*使$f(\alpha_i)\neq 0$，$i=1,2,\cdots,s$。

证明 对于$\alpha\in$ V，作α^{**}：$\alpha^{**}(f)=f(\alpha)$，$f\in$ V*，则α^{**}是 V*上的线性函数. 由定理知，$\alpha\to\alpha^{**}$是 V到 V**的同构映射.

根据同构的性质，由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$非零，得$\alpha_1^{**},\alpha_2^{**},\cdots,\alpha_s^{**}$非零. 利用例2的结果，得到，有$f\in V^*$，使$\alpha_i^{**}(f)\neq 0$，即$f(\alpha_i)\neq 0$，$i=1,2,\cdots,s$.

说明 可以仿照例2来证明，从而，本例中"n维"的条件可以去掉，请读者自己去做.

三 线性变换

有关线性变换的问题往往与线性函数等概念相联系，证明时，首先要搞清问题的含义，而后根据有关的定义与性质去做.

例 5 设σ是**F**上的n维线性空间V的线性变换，定义σ^*：$f\to f\sigma$，$f\in V^*$，证明σ^*是V^*的线性变换.

证明 容易证明，$f\sigma$仍为V上的线性函数，即$f\sigma\in V^*$，σ^*是V^*的变换，从略. 对任意f_1，$f_2\in V^*$，任意$k\in \mathbf{F}$，有$\sigma^*(f_1+f_2)=\sigma^*(f_1)+\sigma^*(f_2)$，$\sigma^*(kf_1)=k\sigma^*(f_1)$，即，$(f_1+f_2)\sigma=f_1\sigma+f_2\sigma$，$(kf_1)\sigma=k(f_1\sigma)$. 实际上，对于任意$\alpha\in V$，有$((f_1+f_2)\sigma)(\alpha)=(f_1+f_2)(\sigma(\alpha))=f_1(\sigma(\alpha))+f_2(\sigma(\alpha))=(f_1\sigma)(\alpha)+(f_2\sigma)(\alpha)=(f_1\sigma+f_2\sigma)(\alpha)$，同样$((kf_1)\sigma)(\alpha)=(k(f_1\sigma))(\alpha)$. 因此，$\sigma^*$是$V^*$的线性变换.

四 向量的正交

$f(\alpha,\beta)$为双线性函数，若对于向量α,β，有$f(\alpha,\beta)=0$，则称α,β关于f正交. 利用双线性函数的性质及正交的定义，证明向量正交的问题.

例6 证明双线性函数$f(\alpha,\beta)$是反对称的必要充分条件是任一向量均与其自身正交.

证明 设$f(\alpha,\beta)$是反对称的，则对于任一向量α，有$f(\alpha,\alpha)=-f(\alpha,\alpha)$，所以$f(\alpha,\alpha)=0$，$\alpha$与其自身正交.

反之，若任一向量均与其自身正交，则对于任一向量α,β，有$f(\alpha,\alpha)=0, f(\beta,\beta)=0$，$f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=0$，而$f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=f(\alpha,\alpha)+f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)+f(\beta,\beta)$，所以，$f(\alpha,\beta)+$

$f(\beta,\alpha)=0$，$f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$，$f$是反对称的．

§5 补充资料

I 复欧氏空间

设V是复数域**C**上的线性空间，在V上定义了一个非退化对称双线性函数f，则称V是一个复欧几里得空间，简称复欧氏空间．

若$f(\alpha,\beta)=0$，则称α,β正交．正交性是对称的．$\alpha\neq 0$，但可以$f(\alpha,\alpha)=0$．若一个向量α与V中所有向量均正交，则$\alpha=0$．

设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是V的一组基，$g_{ij}=f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$，$i,j=1,2,\cdots,n$，则基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$的度量矩阵$G=(g_{ij})$是复对称矩阵．

在V中存在一组基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，使该组基的度量矩阵为E，称$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$为第一类规范基．

当$\dim V=n=2m$时，令$\zeta_j=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_j+i\eta_{n-j+1})$，$\zeta_{n-j+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_j-i\eta_{n-j+1})$，$j=1,2,\cdots,m$；当$\dim V=2m+1$时，令$\zeta_j=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_j+i\eta_{n-j+1})$，$\zeta_{n-j+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_j-i\eta_{n-j+1})$，$j=1,2,\cdots,m$，$\zeta_{m+1}=\eta_{m+1}$；其中$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$为V的第一类规范基，$i$为虚数单位，则$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$的度量矩阵是

$$\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix},$$

称为V的第二类规范基．

设σ是n维复欧氏空间V的一个线性变换．若有V的线性变换σ^*，使得对于V中任意向量α,β，均成立$(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma^*(\beta))$，则称$\sigma^*$为$\sigma$的共轭变换．

若$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为V的一组基，该基的度量矩阵是G，$\sigma,\sigma^*$在该基下的矩阵分别是A，B，则有关系式$B=G^{-1}A'G$．

设σ是n维复欧氏空间V的一个线性变换．若$\sigma^*=\sigma$，则称σ为对称变换；若$\sigma^*=-\sigma$，则称σ为反对称变换．

σ是对称变换$\Leftrightarrow\sigma$在基$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵A满足 $A'G=GA$，G为该基的度量矩阵（在第一类规范基下的矩阵为对称矩阵）．σ是反对称变换$\Leftrightarrow\sigma$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵A满足$A'G+GA=0$，G为该基的度量矩阵（在第一类规范基下的矩阵为反对称矩阵）．

设σ为n维复欧氏空间V的一个线性变换．若σ可逆，且$\sigma^{-1}=\sigma^*$，则称σ为V的一个正交变换．

n维复欧氏空间V的线性变换σ是正交变换$\Leftrightarrow$对于任意$\alpha,\beta\in V$，有$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)\Leftrightarrow\sigma$在V的某组基下的矩阵A满足$A'GA=G$，G为该基的度量矩阵．

若线性空间V的线性变换σ不以-1为其特征值，则称σ为非异线性变换．σ是n维复欧氏空间V的非异正交变换
$\Leftrightarrow\sigma=(Te-\tau)(Te+\tau)^{-1}=(Te+\tau)^{-1}(Te-\tau)$，其中$\tau$是一个非异的反对称变换．

Ⅱ　辛空间

设V是复数域**C**上的n维线性空间，在V上定义了一个非退化反对称双线性函数$f(\alpha,\beta)$，则称V为辛空间．

辛空间的维数n必为偶数．

若$f(\alpha,\beta)=0$，则称α与β正交．正交性是对称的．每个非零向量α都与其自身正交．

设V是$n=2m$维辛空间，则有V的一组基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$；其度量矩阵为

$$G=\begin{pmatrix}A&&&\\&A&&\\&&\ddots&\\&&&A\end{pmatrix},\quad 其中\ A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},$$

这样的基称为第一类规范基．

设V是$n=2m$维辛空间，则有V的一组基$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$，其度

量矩阵为$\begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix}$，其中E为$m$阶单位矩阵．这样的基称为第二类规范基．

设σ是$n=2m$维辛空间V的一个线性变换．若有V的线性变换σ^*，使得对于任意$\alpha,\beta\in V$，均有$(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma^*(\beta))$，则称$\sigma^*$是$\sigma$的共轭变换．若$\sigma^*=\sigma$，则称$\sigma$是对称变换．若$\sigma^*=-\sigma$，则称$\sigma$是反对称变换．若$\sigma$可逆，且$\sigma^{-1}=\sigma^*$，则称$\sigma$为正交变换．

σ是正交变换$\Leftrightarrow$对任意$\alpha,\beta\in V$，有$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$．

设V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$的度量矩阵为G，V的线性变换$\sigma$在该基下的矩阵为A，则：1）$\sigma$是对称变换$\Leftrightarrow A'G=GA$；2）$\sigma$是反对称变换$\Leftrightarrow A'G+GA=0$；3）$\sigma$是正交变换$\Leftrightarrow A'GA=G$。

$n=2m$维辛空间V的线性变换σ是一个非异的正交变换$\Leftrightarrow\sigma=(Te-\tau)(Te+\tau)^{-1}=(Te+\tau)^{-1}(Te-\tau)$，其中$\tau$是一个非异的反对称变换．

Ⅲ　多重线性代数

设V是数域**F**上的线性空间．对于V中的p个向量$x,y,\cdots,z$和对偶空间V^*中的q个向量$f,g,\cdots,h$所组成的串$x,y\cdots,z,f,g,\cdots,h$，对应地建立**F**上确定的数$F(x,\cdots,z,f,\cdots,h)$，则称在V上给出了序型(p,q)的有$p+q$个变动向量的函数F．若F对于每个各别的变动向量（其余向量不变）都是线性的，则称F是一个多重线性函数，或多重线性型．

数域**F**上的线性空间V中序型(p,q)的张量是指这样的对应，对于V的每一组基都能定出一个$(p+q)$维列$F_{i_1\cdots i_p}^{j_1\cdots j_q}$，而对于不同的基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$与$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$的列$F_{i_1\cdots i_p}^{j_1\cdots j_q}$与$F'{}_{i_1\cdots i_p}^{j_1\cdots j_q}$之间有关系式

$$F'^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}=\sum_{\lambda_1,\cdots,\mu_q}\tau_{i_1\lambda_1}\cdots\tau_{i_p\lambda_p}\sigma_{j_1\mu_1}\cdots\sigma_{j_q\mu_q}F^{\mu_1\cdots\mu_q}_{\lambda_1\cdots\lambda_p}$$

存在，其中$T=(\tau_{ij})$是$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$到$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$的过渡矩阵，而$(\sigma_{ij})=S=T'^{-1}$。

Ⅳ 历史资料点滴

1868年，魏尔斯特拉斯完成了二次型的理论，并且，将其理论推广到双线性型$a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+\cdots+a_{1n}x_1y_n+\cdots+a_{n1}x_ny_1+a_{n2}x_ny_2+\cdots+a_{nn}x_ny_n$。

Gregorio Ricci-Curbastro（1853—1925）于1887至1896年这段时间里，研究在坐标变换下不变形式的问题，引进了张量的概念，给出了1阶协变张量、2阶协变张量、1阶反变张量，2阶反变张量等。后来，Ricci和他著名的学生Tullio Levi- Civita（1873—1941）共同进行这方面的工作。

数学家Georg Pick 让爱因斯坦注意Ricci和Levi-Civita的数学理论，爱因斯坦学习了张量的理论，并使张量成为表达相对论的优美的数学语言，1916年爱因斯坦给出了"张量分析"的名字，从而形成为一门学科。

近年来，多重线性代数已经成为微分几何、物理学、工程科学等许多领域的常用工具。

§6 基本习题

1 设V是数域F上的3维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是V的一组基，$f$是V上的线性函数，使得$f(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=f(\varepsilon_1-2\varepsilon_3)=0$，$f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=1$，试求$f(\alpha)$，而$\alpha=3\varepsilon_1+2\varepsilon_2-5\varepsilon_3$。

2 设V是数域F上的2维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2$是V的一组基，$f$是V上的双线性函数，使得$f(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_1-\varepsilon_2)=1$，$f(\varepsilon_1,\varepsilon_1+\varepsilon_2)=-1$，$f(\varepsilon_2,\varepsilon_1)=1$，$f(\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_2)=2$，试求出$f$。

3 设V是数域F上的2维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2$是V的一组基，

f_1, f_2是$\varepsilon_1, \varepsilon_2$的对偶基，试求V的基$\eta_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2$，$\eta_2=\varepsilon_1+2\varepsilon_2$的对偶基（由$f_1, f_2$表出）.

4　$V=F[x]_3$，对 $p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2\in V$，定义 $f_1(p(x))=\int_0^1 p(x)dx$，$f_2(p(x))=\int_0^2 p(x)dx$，$f_3(p(x))=\int_{-1}^0 p(x)dx$，试证$f_1, f_2, f_3$均是V上的线性函数，并求出V的一组基$p_1(x)$，$p_2(x)$，$p_3(x)$，使$f_1, f_2, f_3$为其对偶基.

5　在F^4中定义双线性函数 $f(X,Y)=3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3$，其中$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)$，$Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$，试求$f$在$F^4$的基$\varepsilon_1=(1,-2,-1,0)$，$\varepsilon_2=(1,-1,1,0)$，$\varepsilon_3=(-1,2,1,1)$，$\varepsilon_4=(-1,-1,0,1)$下的度量矩阵.

6　设V是数域F上的线性空间，f是V上的线性函数，证明$W=\{\alpha \mid \alpha\in V 且 f(\alpha)=0\}$是V的子空间.

7　设(α,β)是n维欧氏空间V的内积，对于该欧氏空间V中的一个元素α，定义V^*中的一个元素α^*：$\alpha^*(\beta)=(\alpha,\beta)$，$\beta\in V$. 证明V到$V^*$的映射$\alpha\to\alpha^*$是一个同构映射.

8　设σ是数域F上的线性空间V的线性变换，f是V上的线性函数，证明$f\sigma$是V上的线性函数.

9　设$f(\alpha,\beta)$是V上的反对称双线性函数，K是V的子空间，证明$K^{\perp}=\{\alpha\in V \mid f(\alpha,\beta)=0,\ \forall\beta\in K\}$是V的子空间.

10　证明奇数维的线性空间V上的反对称双线性函数一定是退化的.

（孙宗明）

第十一章　代数基本概念介绍

§1　概括说明

我们已经研究过各种各样的对象，如数、多项式、向量、矩阵、变换等，它们的共同点是：可以进行某些运算，并且，运算具有某些性质，例如，满足结合律，满足交换律，等等。代数作为一门数学学科，主要就是研究运算的性质。本章中，我们把各种对象的共同点概括起来作统一的讨论，给出代数系统的概念，并对群、环、域三种最基本最最要的代数系统进行简单的讨论。这些内容，不仅在代数学中，而且在现代数学中，都是基本的。

本章的内容分为四个部分：代数系统，群，环，域。

所谓代数系统，就是定义了代数运算的非空集合。代数运算具有某些性质，称为运算律。我们将一般地讨论结合律、交换律、分配律。

群是含有一个代数运算的代数系统，从而被认为是最简单的代数系统，它作为其它代数系统（如环与域）的基础。我们给出群的定义，讨论群的若干性质，建立子群的概念，并研究群的同构。

环是有两个代数运算的代数系统，其代数运算分别称为加法与乘法。我们建立环的概念，讨论环中的运算规则，建立子环的概念，研究环的同构。

域也是环，同时，域可以看作两个群，通过对域的讨论，将会看到，域中的运算规则与数的通常的计算规则几乎完全相同。

本章的补充资料是：群的元素的阶，循环群的构造，等价关系与集合的分类，历史资料点滴。

§2 内容提要

I 代数系统

一 代数运算

设A是一个非空集合，作$A\times A=\{(a,b)|a,b\in A\}$．$A\times A$到A的一个映射○称为A的一个代数运算，简称为运算．即，对于A中任意的有序的一对元素a,b，按照法则○，都有唯一确定的A的元素c与之对应，记为$a○b=c$，称c是a与b进行运算的结果．

对于某个数域F而言，数的通常的加法、减法、乘法均是F的代数运算，而除法则不是；另外，$x○y=x$，$x○y=x+y^2$也都是F的代数运算．对于数域F上的线性空间V而言，向量的加法是V的代数运算，而数与向量的数量乘法则不是V的代数运算．另外，欧氏空间V的内积也不是V的代数运算．

二 运算定律

设○是A的代数运算．若对于任意$a,b,c\in A$，均有$(a○b)○c=a○(b○c)$，则称○适合结合律．

设A的代数运算○适合结合律，则对于A中的任意$n(n\geqslant 2)$个元素a_1，a_2，…，a_n来说，所有不同的加括号步骤，得到的结果都是相等的，记为$a_1○a_2○\cdots○a_n$．

设○是A的代数运算．若对于任意的$a,b\in A$，均有$a○b=b○a$，则称○适合交换律．

若A的代数运算○适合结合律与交换律，则在$a_1○a_2○\cdots○a_n$（$n\geqslant 2$）中元素的次序可以交换．

设⊙，⊕是A的两个代数运算．若对于任意$a,b,c\in A$，有$a\odot(b\oplus c)=(a\odot b)\oplus(a\odot c)$，则称⊙对于⊕适合左分配律．

设⊙，⊕是A的两个代数运算．若⊕适合结合律，⊙对⊕适合左分配律，则对于任意$a,b_1,b_2,\cdots,b_n\in A$，$n\geqslant 2$，成立

$$a\odot(b_1\oplus b_2\oplus\cdots\oplus b_n)=(a\odot b_1)\oplus(a\odot b_2)\oplus\cdots\oplus(a\odot b_n).$$

类似地，有右分配律。

三　代数系统

设A是一个非空集合，$\bigcirc$是A的一个代数运算，则A与$\bigcirc$合在一起，称为一个代数系统，记为(A，$\bigcirc$)，有时简记为A.(Q，+)(R，×)、(C，+)等都是代数系统。若A是有限集合，则称(A，$\bigcirc$)是一个有限代数系统。否则，称(A，$\bigcirc$)是一个无限代数系统。

设(A，$\bigcirc$)是一个代数系统，A_1是A的非空子集。若$\bigcirc$也是A_1的代数运算，换言之，A_1对$\bigcirc$封闭，则称(A_1，$\bigcirc$)是(A，$\bigcirc$)的一个子代数系统。

四　代数系统的同构

设有代数系统(A，$\bigcirc$)与($\overline{A}$，$\overline{\bigcirc}$).若有A到$\overline{A}$的双射σ，使得对于任意$a,b\in A$，均有$\sigma(a\bigcirc b)=\sigma(a)\overline{\bigcirc}\ \sigma(b)$，则称$\sigma$是A到$\overline{A}$的对于$\bigcirc$与$\overline{\bigcirc}$的同构映射，称A与$\overline{A}$对于$\bigcirc$与$\overline{\bigcirc}$同构，记为(A，$\bigcirc$)$\simeq$($\overline{A}$，$\overline{\bigcirc}$)，或者记为$A\overset{\sigma}{\simeq}\overline{A}$，简记为$A\simeq\overline{A}$。A到A对于$\bigcirc$与$\bigcirc$的同构映射，称为A的自同构映射，简称自同构。

代数系统的同构具有反身性、对称性、传递性。

若A与$\overline{A}$对于$\bigcirc$与$\overline{\bigcirc}$同构，则：1)$\bigcirc$适合结合律$\Leftrightarrow\overline{\bigcirc}$适合结合律；2)$\bigcirc$适合交换律$\Leftrightarrow\overline{\bigcirc}$适合交换律。

若$\odot$，$\oplus$是A的两个代数运算，$\overline{\odot}$，$\overline{\oplus}$是$\overline{A}$的两个代数运算，σ是A到$\overline{A}$的双射，使得A到$\overline{A}$对于$\odot$与$\overline{\odot}$同构，对于$\oplus$与$\overline{\oplus}$也同构，则：1)$\odot$对于$\oplus$适合左分配律$\Leftrightarrow\overline{\odot}$对于$\overline{\oplus}$适合左分配律；2)$\odot$对于$\oplus$适合右分配律$\Leftrightarrow\overline{\odot}$对于$\overline{\oplus}$适合右分配律。

抽象地看，同构的代数系统被认为是相同的。

Ⅱ　群

一　定义

设G是一个非空集合。在G上定义了一个称之为乘法的代数运算，并将a与b运算的结果记作ab。若：1）$(ab)c=a(bc)$，对任意$a,b,c\in G$；2）存在$e\in G$，使得对于任意$a\in G$，成立$ae=ea=a$，称e是G的一个单位元素；3）对于任意$a\in G$，都相应存在$b\in G$，使得$ab=ba=e$，称b是a的一个逆元素，则称G对于其代数运算作成一个群，简称G是一个群。

整数加群**Z**，有理加群**Q**，实数加群**R**，复数加群**C**，非零实数乘群**R***，正实数乘群$\mathbf{R}^+$，n次单位根乘群U_n；数域**F**上的线性空间V的全体可逆线性变换乘群；数域**F**上的全体n阶可逆矩阵乘群（n级线性群）$GLn(\mathbf{F})$；集合M的全变换群S_M；等等，都是群的例子。

设G是群。若对于任意a，$b\in G$，均成立$ab=ba$，则称G为交换群，或Abel群。若群G的元素个数为有限，则称G为有限群，否则称为无限群。有限群G所含元素的个数称为G的阶，无限群G的阶称为无限，G的阶记为$|G|$或$o(G)$。

群的定义包括两部分：元素的集合，运算。同一个集合，所定义的运算不同，就成为不同的群。

二　性质

群G的单位元素是唯一的，记作e；群G的任一元素a的逆元素是唯一的，记作a^{-1}。群G中成立消去律，即，对任意$a,x,y\in G$，成立：1）左消去律$ax=ay\Rightarrow x=y$；2）右消去律$xa=ya\Rightarrow x=y$。对于群G中的任意元素a，b，方程$ax=b$与$ya=b$在G中均有解，且均仅有一解。

在群G中定义元素的方幂：对任意$a\in G$，n是正整数，$a^1=a$，$a^{n+1}=a^na$；$a^0=e$；$a^{-n}=(a^{-1})^n$。指数法则：设a是群G的任一元素，m，n是任意整数，则成立$a^na^m=a^{n+m}$，$(a^n)^m=a^{nm}$；而当a，$b\in G$，$ab=ba$时，还成立$(ab)^n=a^nb^n$。

三　子群

若群G的非空子集H对于G的运算也作成一个群，则称H是群G的子群。若e是群G的单位元素，则$\{e\}$与G均是G的子群，称为平凡子群。若G还有其他的子群，则称为非平凡子群。

$n\mathbf{Z}=\{nk \mid k\in \mathbf{Z}\}$是整数加群$\mathbf{Z}$的子群，其中$n$为一固定整数。

若H是群G的子群，则H的单位元素就是G的单位元素e，H的任一元素a的逆元素，就是a在G中的逆元素a^{-1}。

群G的非空子集成为G的子群⇔(1)对任意a，$b\in H$，有$ab\in H$；2)对任意$a\in H$，有$a^{-1}\in H$)⇔对任意$a,b\in H$，有$ab^{-1}\in H$。

群G的若干个子群的交是G的子群，而群G的两个子群H_1与H_2的并$H_1\cup H_2$是G的子群当且仅当$H_1\subseteq H_2$或$H_2\subseteq H_1$。

设G是群，作$Z(G)=\{x \mid x\in G,\ xa=ax,\ \forall a\in G\}$，则$Z(G)$是G的子群，称为G的中心。

四 同构

设G与$\overline{G}$是两个群。若有G到$\overline{G}$的双射σ，使得对于任意x，$y\in G$，均成立$\sigma(xy)=\sigma(x)\sigma(y)$，则称$\sigma$是G到$\overline{G}$的同构映射，称G与$\overline{G}$同构，记为$G\overset{\sigma}{\simeq}\overline{G}$，简记为$G\simeq\overline{G}$。

设G是群，$\overline{G}$是一个代数系统，$\overline{G}$的代数运算也称为乘法。若$G\overset{\sigma}{\simeq}\overline{G}$，则$\overline{G}$对于其乘法也作成一个群。

设G与$\overline{G}$是两个群，且$G\overset{\sigma}{\simeq}\overline{G}$，则：1)G的单位元素$e$与$\overline{G}$的单位元素$\bar{e}$互相对应，即$\bar{e}=\sigma(e)$，$e\longleftrightarrow\bar{e}$；2)若G的元素$a$与$\overline{G}$的元素$\bar{a}$互相对应，即$\bar{a}=\sigma(a)$，$a\longleftrightarrow\bar{a}$，则$a$的逆元素$a^{-1}$与$\bar{a}$的逆元素$\bar{a}^{-1}$互相对应，即$\bar{a}^{-1}=\sigma(a^{-1})$，$a^{-1}\longleftrightarrow\bar{a}^{-1}$。

设G是一个群。对于G的每一个元素a，定义

$$\sigma_a:\ G\to G,\ \sigma_a(x)=ax,\ \forall x\in G,$$

则σ_a是G到G的双射，即σ_a是G的一一变换，称σ_a是元素a所引

起的左平移。$G_L=\{\sigma_a|a\in G\}$对于变换的乘法作成一个群，且$G\simeq G_L$。称变换群G_L为群G的左正则表示。

设G是一个群。对于G的每一个元素a，定义

$$\tau_a: G\to G, \ \tau_a(x)=xa^{-1}, \ \forall x\in G,$$

则τ_a是G到G的双射，即τ_a是G的一一变换，称τ_a是元素a所引起的右平移。$G_R=\{\tau_a|a\in G\}$对于变换的乘法作成一个群，且$G\simeq G_R$。称变换群G_R为群G的右正则表示。

任何一个群都同构于某个变换群。历史上，群论最早是研究变换群的，而抽象的群的概念正是从变换群抽象出来的。

群的同构具有反身性、对称性、传递性。

抽象地看，同构的群被认为是相同的。

五　加群

设G是一个交换群。若把G的代数运算称为加法，并且把a与b的运算的结果记作$a+b$，则称群G是一个加群。

设G是一个加群，则

1）$(a+b)+c=a+(b+c)$，$a+b=b+a$；

2）G的唯一的单位元素记作0，称为零元素；

3）G的任一元素a的唯一的逆元素记作$-a$，称为a的负元素，读作"负a"；

4）$a+(-b)$简写为$a-b$，读作"a减b"；

5）元素的方幂变为元素的倍，定义如下：n是正整数，$1a=a$，$(n+1)a=na+a$，$(-n)a=n(-a)$，　$0a=0$；

6）指数规则变为倍数规则：$na+ma=(n+m)a$，$n(ma)=(nm)a$，$n(a+b)=na+nb$，其中a，b是G中任意元素，m，n是任意整数。

六　置换群

当M为含有n个元素的有限集合时，M的可逆变换称为n元置换，S_M称为n次对称群，一般记作S_n。

M的元素就用1，2，…，n表示，常称为n个文字，从而S_n中的元素σ可以记为$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$，其中$i_j=\sigma(j)$，$j=1$，2，…，$n$。

n元置换与n阶排列之间存在双射，从而$|S_n|=n!$。

若n元置换σ把1，2，…，n中某两个文字互变，而保持其余的文字不动，则称σ是一个对换。

若n元置换σ把1，2，…，n中某m个文字i_1，i_2，…，i_m，轮换，即$\sigma(i_1)=i_2$，$\sigma(i_2)=i_3$，…，$\sigma(i_{m-1})=i_m$，$\sigma(i_m)=i_1$，而保持其余的文字不动，则称σ是一个m-轮换，记作$\sigma=(i_1i_2\cdots i_m)$。若$\sigma$是2-轮换，则$\sigma$是对换．若$\alpha_i\neq\beta_j$，$i=1$，2，…，$m$，$j=1$，2，…，$t$，则称两个轮换$(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)$与$(\beta_1\beta_2\cdots\beta_t)$是不相连的．不相连的轮换对乘法是可交换的。

每个n元置换σ都可以分解为不相连的轮换的乘积，n个文字中的每个文字都出现于一个轮换中；而且，不计因子次序，分解式是唯一的，即：若$\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t=\sigma_1'\sigma_2'\cdots\sigma_u'$是$\sigma$的两个分解式，则必有$t=u$，且适当交换因子的次序之后有$\sigma_k=\sigma_k'$，$k=1$，2，…，$t$。

任一个n元置换σ均可以写为对换的乘积，其写法是不唯一的，但是，不同的写法中含对换个数的奇偶性是相同的，由σ唯一决定。

设x_1，x_2，…，x_n是n个文字，而

$$D(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i<j}(x_i-x_j),$$

对于$\sigma\in S_n$，定义

$$\sigma(D(x_1,x_2,\cdots,x_n))=D(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\cdots,x_{\sigma(n)})$$

$$=\prod_{i<j}(x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(j)}).$$

若$\sigma(D)=D$，则称σ为偶置换；若$\sigma(D)=-D$，则称σ是奇置换。

σ是偶置换$\Leftrightarrow\sigma$可以写为偶数个对换之积；σ是奇置换$\Leftrightarrow\sigma$可以写为奇数个对换之积．S_n中奇偶置换各占一半($n\geqslant 2$)．

S_n中的全体偶置换组成S_n的一个子群，称为n次交错群，记作A_n．$|A_1|=|S_1|=1$，$|A_n|=\frac{1}{2}n!(n\geqslant 2)$．

Ⅲ 环

一 定义

设在非空集合R上定义了两个代数运算，一个称为加法，记作$a+b$，一个称为乘法，记作ab．若满足：

1）关于加法的以下规则：Ⅰ）加法结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$，任意a，b，$c\in R$；Ⅱ）加法交换律$a+b=b+a$，任意a，$b\in R$；Ⅲ）有元素 $0\in R$，使得对于任意$a\in R$，成立 $a+0=a$；Ⅳ）对于R中任意元素a，相应存在$b\in R$，使得$a+b=0$；

2）乘法结合律$(ab)c=a(bc)$，任意a，b，$c\in R$；

3）关于乘法和加法的分配律$a(b+c)=ab+ac$，$(b+c)a=ba+ca$，任意a，b，$c\in R$，

则称R对于其加法与乘法作成环，简称R是环．

整数环$\mathbf{Z}$；数域$\mathbf{F}$上的一元多项式环$\mathbf{F}[x]$，多元多项式环$\mathbf{F}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$；环R上的一元多项式环$R[x]$；数域$\mathbf{F}$上的$n$阶矩阵环$M_n(\mathbf{F})$；环R上的$n$阶矩阵环$M_n(R)$，也称为全阵环；只有一个元素0的环$\{0\}$；等等，都是环的例子．

二 性质

若R是环，则R对于其加法作成一个加群，从而，环R有下列性质：

1）R有唯一的零元素0，$0+a=a+0=a$，$\forall a\in R$；

2）R的每个元素a有唯一的负元素$-a$，$-a+a=a-a=0$；

3）$-(-a)=a$，$\forall a\in R$；

4）$a+c=b\Leftrightarrow c=b-a$，$\forall a$，$b$，$c\in R$；

5)去括号规则，$-(a+b)=-a-b$，$-(a-b)=-a+b$，$\forall a, b\in R$；

6）$(-n)a=n(-a)=-(na)$，$\forall a\in R$，$\forall n\in \mathbf{Z}$.

设a是环R的元素，n是正整数，定义方幂为：$a^1=a$，$a^{n+1}=a^n a$.

若R是环，则对于任意a，b，c，a_i，$b_j\in R$，成立

1）$(a-b)c=ac-bc$，$c(a-b)=ca-cb$；

2）$0a=a0=0$（三个零均是R的零元素）；

3）$(-a)b=a(-b)=-ab, (-a)(-b)=ab$(符号规则)；

4）$a\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)=\sum_{j=1}^{n} ab_j$，$\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)a=\sum_{j=1}^{n} b_j a$，

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j$$（m，n均为正整数）；

5）$(na)b=a(nb)=n(ab)$，$(ma)(nb)=(mn)(ab)$，m，$n\in \mathbf{Z}$；

6）$a^m a^n=a^{m+n}, (a^m)^n=a^{mn}$($m,n$为正整数)(指数规则)．

三　子环

设S是环R的非空子集．若S对于R的代数运算也作成环，则称S是R的子环．

环R的子集{0}与R作成其子环，称为R的平凡子环，而其余的子环（若还有的话），称为R的非平凡子环．

若S是环R的子环，则加群S是加群R的子加群，从而，S的零元素就是R的零元素，S的任一元素u的负元素就是u在R中的负元素．

环R的非空子集合S作成R的子环⇔1）对于任意u，$v\in S$，有$u+v\in S$，2）对于任意$u\in S$，有$-u\in S$，3）对于任意u，$v\in S$，有$uv\in S$．

设R是环，作$C=\{x|x\in R,\ xr=rx,\ \forall r\in R\}$，则称C是R

的中心。C是R的一个重要的子环。

$n\mathbf{Z}$是$\mathbf{Z}$的子环；$\mathbf{F}[x_1]$是$\mathbf{F}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$的子环；$M_n(\mathbf{F})$中的全体对角形矩阵作成其子环；等等。

四　同构

设R与$\overline{R}$是两个环，σ是R到$\overline{R}$的双射。若对于任意a，$b\in R$，均有$\sigma(a+b)=\sigma(a)+\sigma(b)$，$\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)$，则称$\sigma$是R到$\overline{R}$的同构映射，称R与$\overline{R}$同构，记为$R\overset{\sigma}{\simeq}\overline{R}$，简记为$R\simeq\overline{R}$。

设R是一个环，$\overline{R}$是一个非空集合，且$\overline{R}$有两个代数运算，一个称为加法，一个称为乘法．若有R到$\overline{R}$的双射σ，使得R与$\overline{R}$关于它们的一对加法同构，关于它们的一对乘法也同构，则$\overline{R}$也是一个环。

若R与$\overline{R}$是两个环，且$R\simeq\overline{R}$，则：1）R的零元素与$\overline{R}$的零元素相对应；2）R的元素a的负元素与a的象的负元素相对应。

抽象地看，同构的环被认为是相同的。

Ⅳ　域

一　定义

设F是一个至少含两个元素的环．若：1）有$e\in F$，使得对于任意$a\in F$，成立$ae=ea=a$，称e是F的单位元素；2）对任意$a\in F$，$a\neq 0$，都相应存在$b\in F$，使$ab=ba=e$，称b是a的一个逆元素；3）对于任意a，$b\in F$，有$ab=ba$，则称F是一个域。

数域，有理分式域$\mathbf{F}(x)$，有限域，等等，都是域的例子。

二　性质

设F是一个域，则

1）$a\neq 0$，$b\neq 0\Rightarrow ab\neq 0$；2）$ab=ac$，$a\neq 0\Rightarrow b=c$；

3）记$F^*=F\setminus\{0\}$，即F^*是F中的非零元素的集合．F^*对于F的乘法作成一个交换群，称F^*为F的非零元素乘群，简称为F的乘群，从而F的单位元素唯一，记为e，F的任一非零元素

a的逆元素唯一，记为a^{-1}；

4）方程$ax=b(a\neq 0)$在F中有且仅有一解。

域F描述如下：加群F与乘群F*，两个群由分配律联系着。

设F是一个域，a，b，c，$d\in$F，且 $b\neq 0$，$d\neq 0$，则$b^{-1}a=ab^{-1}$，记$ab^{-1}=\frac{a}{b}$，成立：1）$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$；　2）$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$；　3）$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$。

三　子域

设F是域，F_1是F的至少含有两个元素的子集合。若F_1对于F的代数运算也作成域，则称F_1是F的子域。

有理数域是任何数域的子域。

若F_1是F的子域，则加群F_1是加群F的子群，乘群F_1^*是乘群F^*的子群，从而：1）F_1的零元素就是F的零元素；2）F_1的任一元素a的负元素就是a在F中的负元素；3）F_1的单位元素就是F的单位元素；4）F_1的任一非零元素a的逆元素就是a在F中的逆元素。

域F的至少含有两个元素的子集F_1作成F的子域$\Leftrightarrow$1）对任意$a,b\in F_1$，有$a+b\in F_1$；2）对任意$a\in F_1$，有$-a\in F_1$；3）对任意$a,b\in F_1$，有$ab\in F_1$；　4）对任意非零元素$a\in F_1$，有$a^{-1}\in F_1$。

四　同构

设F与$\overline{F}$是两个域。若有F到$\overline{F}$的双射σ，使得对于任意a，$b\in$F，有$\sigma(a+b)=\sigma(a)+\sigma(b)$，$\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)$，则称$\sigma$是F到$\overline{F}$的同构映射，称F与$\overline{F}$同构，记为$F\overset{\sigma}{\simeq}\overline{F}$，简记为$F\simeq\overline{F}$。

若R与$\overline{R}$是两个环，且$R\simeq\overline{R}$，则R是域$\Leftrightarrow\overline{R}$是域。

若F与$\overline{F}$是两个域，且$F\simeq\overline{F}$，则：1）F的零元素与$\overline{F}$的零元素互相对应；2）F的元素a的负元素与a的象的负元素互相

对应；3）F的单位元素与F的单位元素互相对应；4）F的非零元素a的逆元素与a的象的逆元素互相对应。

抽象地看，同构的域被认为是相同的。

行列式与线性方程组，一元多项式的因式分解，矩阵，线性空间与线性变换的一般理论，在一般的域上同样可以建立，与数域的情况几乎完全相同。

§3 重点难点

本章的主题词是：代数运算，交换律，结合律，分配律，代数系统，子代数系统，同构；群，整数加群**Z**，n次单位根乘群U_n，n级线性群$GLn(\mathbf{F})$，n次对称群S_n，交换群，有限群，单位元素，逆元素，子群，群G的中心Z(G)，消去律，左(右)正则表示，加群，n元置换；环，零元素，全阵环，子环；域，乘群，有限域，子域。

本章的基本方法是：元素运算与求逆法，置换化循环法，子代数系统求法，证明作成群(环、域)的方法，同构证明方法。

本章的重点是：代数运算，群，同构。

代数运算是本章的基础，运算定律出现在群、环、域概念中，因此，代数运算成为本章的一个重点。

群是第一个抽象的代数系统，群的概念的产生，开始了代数学的一个新的时期；群在数学其它分支、物理学、化学及其它领域有广泛的应用；群也作为环与域的基础，同时，对于群的讨论给环与域提供了范例，因此，群成为本章的一个重点。

同构是一个重要的讨论内容，是抽象代数学的一个基本的工具和方法，占有特殊的地位；抽象地看，同构的代数系统被认为是相同的，从而，同构常常起到化未知为已知的转化作用，因此，同构成为本章的一个重点。

本章的难点是：群，加群，环的定义。

群既是本章的一个重点，又是本章的一个难点，原因在于：群是所研究的第一个代数基本概念，群的定义以公理的形式出现，然后由定义推出各种性质，还要研究子群，研究群的同构，这些内容都是相当抽象的。解决困难的方法是：认真研究群的例子，既研究常见的例子，也研究不常见的例子，然后，从具体例子出发，较好地领会并掌握定义，再从定义出发研究其它问题。

加群成为本章的一个难点，原因在于：群的运算由乘过渡到加需要作认真的考虑，要有一个习惯的过程。解决困难的方法是：通过整数加群**Z**，具体地研究乘与加的对应及相互转化。

环的定义成为本章的一个难点，原因在于：环有两种运算，而对于加法作成一个加群；另外，两种运算由分配律联系着，较为复杂。解决困难的方法是：首先是通过环来进一步了解群的实质，迅速习惯这种由乘到加的转换过程，再用具体例子来分析和领会环的定义。

§4 习题类解

I 计算题

一 代数运算

根据代数运算的定义来判断某一法则是否是给定集合的代数运算。

设A是一个n元代数系统，将A的元素按顺序排出，$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，而后画两条横、竖垂直线，将元素排于横线上方、竖线左方，第i行与第j列交叉处写上a_i与a_j运算的结果。从而，得到代数系统A的运算表。

例 1 数的普通除法是否是整数集**Z**的代数运算？

解 $2, 3\in \mathbf{Z}$，但 $2\div 3=2/3\notin \mathbf{Z}$，所以，数的普通除法不是**Z**的代数运算。

例 2　设F＝{单，双}，F的加法定义为：单＋单＝双＋双＝双，单＋双＝双＋单＝单；F的乘法定义为：单·单＝单，单·双＝双·单＝双·双＝双，试列出F的运算表.

解

+	单	双
单	双	单
双	单	双

，

·	单	双
单	单	双
双	双	双

.

二　置换的运算

用置换的定义及其特别的表示形式，进行运算.

例 3　设$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$，$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&1&5&2\end{pmatrix}$，试求$\sigma\tau$，$\sigma^{-1}$.

解　$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&1&5&2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}3&4&1&5&2\\1&5&2&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&1&5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&2&4&3\end{pmatrix},$$

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&1&5&4\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}.$$

三　置换的分解

分解为不相连的轮换的乘积的方法：取1，作1，$\sigma(1)$，$\sigma^2(1)$，…，出现$\sigma^t(1)=1$，且t为第一个这样的正整数，从而得轮换$\sigma_1=(1\sigma(1)\sigma^2(1)\cdots\sigma^{t-1}(1))$；在$\sigma_1$的文字之外另取一文字，重复上述步骤得$\sigma_2$；一直下去，得$\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k$.

由$(i_1i_2\cdots i_k)=(i_ki_{k-1})\cdots(i_ki_3)(i_ki_2)(i_ki_1)$，将置换分解为对换之积，从而确定置换的奇偶性.

例 4　求$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}$的轮换分解式.

解　$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2)(4\ 5)$.

例5　将$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&1\end{pmatrix}$写为对换之积，并确定其奇偶性.

解 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2)(4\ 5)$

$=(2\ 3)(2\ 1)(4\ 5)$，是奇置换。

说明 计算得出，排列3 1 2 5 4的逆序数为3，从而可以由此确定σ是奇置换。

四 子代数系统

要求出(A，○)的子代数系统，可先求出集合A的非空子集合，再由运算表确定子代数系统，当为群、环、域时，还要注意使用有关的性质。

例6 设有代数系统(A，○)，$A=\{a, b, c, d\}$，○如下表

○	a	b	c	d
a	a	a	b	a
b	a	a	c	b
c	c	a	b	c
d	a	b	c	d

试求出它的所有子代数系统。

解 子代数系统是：4个1元子集中有$A_1=\{a\}$，$A_2=\{d\}$；6个2元子集中有$A_3=\{a, b\}$，$A_4=\{a, d\}$；4个3元子集中有$A_5=\{a, b, c\}$，$A_6=\{a, b, d\}$；4元子集$A_7=A$。

Ⅱ 证明题

一 定义

按照所给的条件，根据定义进行验证，证明作成群、环、域。

例1 $\mathbf{R}$为实数集，设$M=\{(a, b)|a, b\in\mathbf{R}, b\neq 0\}$，在M上定义$(a, b)(c, d)=(ac, ad+b)$，证明这是M的一个代数运算，并且，M对于该运算作成一个群。

证明 $(1, 0)\in M$，从而M非空。

对于(a, b)，$(c, d)\in M$，由$a\neq 0$，$c\neq 0$得$ac\neq 0$，从而，$(ac, ad+b)\in M$，所以，这是M的一个代数运算。

1)易验证$((a, b)(c, d))(e, f)=(a, b)((c, d)(e,f))$.

2)$(1, 0)\in M$，且对于任意$(a, b)\in M$，$(1, 0)(a, b)=(1\cdot a, 1\cdot b+0)=(a, b)$，$(a,b)(1,0)=(a\cdot 1,a\cdot 0+b)=(a,b)$.

3)对于任意$(a, b)\in M$，$a\neq 0$，有$\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)\in M$，且

$$(a,b)\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)(a, b)=(1, 0).$$

因此，M对于该代数运算作成一个群.

二 性质

根据群（环、域）的定义及已经证明的性质，证明群（环、域）具有某种性质.

例 2 若群G的每个元素x都适合$x^2=e$，证明G是交换群.

证明 对任意x，$y\in G$，由条件得$(xy)^2=e$，$x^2=e$，$y^2=e$，从而$(xy)^2=x^2y^2$，即$xyxy=xxyy$，由消去律得，$xy=yx$，因此，G是交换群.

例 3 设环R的每个元素x均适合$x^2=x$，证明：1) 对任意$x\in R$，$x+x=0$；2)对任意x，$y\in R$，$xy=yx$.

证明 1)$(x+x)^2=x+x$，$x^2+x^2+x^2+x^2=x+x$，$x+x+x+x=x+x$，$x+x=0$.

2)$(x+y)^2=x+y$，$x^2+xy+yx+y^2=x+y$，$xy+yx=0$，$x^2y+xyx=0$，$xyx+yx^2=0$，$xy+xyx=xyx+yx$，$xy=yx$.

三 子代数系统

按照子群（子环、子域）的定义及有关性质，证明作成子群（子环、子域）.

例 4 若a是群G的任一元素，证明G中所有与a可交换的元素的集合H作成G的一个子群.

证明 由于$ae=ea$，所以$e\in H$，从而H非空.

对任意x，$y\in H$，有$xa=ax$，$ya=ay$，所以$(xy)a=x(ya)$

$=x(ay)=(xa)y=(ax)y=a(xy)$，从而$xy\in H$。

对任意$x\in H$，有$xa=ax$，所以$x^{-1}(xa)x^{-1}=x^{-1}(ax)x^{-1}$，$(x^{-1}x)(ax^{-1})=(x^{-1}a)(xx^{-1})$，$e(ax^{-1})=(x^{-1}a)e$，$ax^{-1}=x^{-1}a$，从而$x^{-1}\in H$。

因此，H作成G的子群。

例 5 若a是环R的任一元素，$M=\{x|x\in R, xa=ax\}$，证明M作成R的子环。

证明 由于$0a=a0=0$，所以$0\in M$，从而M非空。

对于任意x，$y\in M$，有$xa=ax$，$ya=ay$，所以$a(x-y)=ax-ay=xa-ya=(x-y)a$，$a(xy)=(ax)y=(xa)y=x(ay)=x(ya)=(xy)a$，$x-y$，$xy\in M$。

因此，M作成R的子环。

四 同构

根据同构的定义及有关性质，来证明关于同构的问题。

例 6 数域**F**上的所有n阶数量矩阵的集合$\overline{F}$，对于矩阵的加法与乘法作成一个域，且$\mathbf{F}\simeq\overline{F}$。试证明之。

证明 作σ：$\mathbf{F}\to\overline{F}$，$\sigma(a)=aE$，$\forall a\in\mathbf{F}$，则易证$\sigma$是**F**到$\overline{F}$的双射。

对任意a，$b\in\mathbf{F}$，$\sigma(a+b)=(a+b)E=aE+bE=\sigma(a)+\sigma(b)$，$\sigma(ab)=(ab)E=(aE)(bE)=\sigma(a)\sigma(b)$，所以$\mathbf{F}\simeq\overline{F}$，从而$\overline{F}$是一个域。

§5 补充资料

I 群的元素的阶

设a是群G的一个元素，能够使$a^m=e$的最小正整数m称为a的阶，a称为m阶元素；若这样的m不存在，则称a的阶为无限，a称为无限阶元素。U_n中，$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$的阶是$n$；**Z**中，

1的阶是无限.

若a是n阶元素，则$\{\cdots,a^{-3},a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3,\cdots\}$ $=\{a^1, a^2,\cdots, a^n\}=\{e, a^1, a^2,\cdots, a^{n-1}\}$是一个$n$元集合. 若$a$的阶是无限，则$a^h=a^k\Leftrightarrow h=k$.

Ⅱ、循环群的构造

若群G的每一个元素都是G的某一个固定元素a的方幂，则称G是一个循环群，并且，称G是由元素a所生成的，记作$G=\langle a\rangle$，称a是G的一个生成元.

若$G=\langle a\rangle$，则$G=\{\cdots,a^{-3},a^{-2},a^{-1},a^0,a^1,a^2,a^3,\cdots\}$.

整数加群$\mathbf{Z}$是循环群，且$\mathbf{Z}=\langle 1\rangle$；$n$次单位根乘群$U_n$是循环群，且$U_n=\langle \varepsilon\rangle$.

若$G=\langle a\rangle$，则G的构造完全由a的阶来决定：当a的阶是无限时，$G\simeq\mathbf{Z}$；当a的阶是n时，$G\simeq U_n$.

研究群的目的，就是把所有的群（互不同构的）都找出来，并搞清楚每个群的构造，所谓构造问题是指集合的元素构成及运算两个方面，我们对循环群解决了这一问题，概括如下：

1)$G=\langle a\rangle$，a的阶为无限，则G的元素构成集合$\{\cdots, a^{-3}, a^{-2},a^{-1},a^0,a^1,a^2,a^3,\cdots\}$，G的乘法是 $a^ha^k=a^{h+k}$；

2)$G=\langle a\rangle$，a的阶为n，则G的元素构成集合$\{a^0,a^1,a^2,\cdots, a^{n-1}\}$，G的乘法是$a^ia^j=a^r$，$i+j=nq+r$，$0\leqslant r\leqslant n-1$.

对于循环群的研究，是抽象代数学中研究问题的一个缩影. 抽象代数学就是要研究各种代数系统，而对于一个代数系统，就是要解决三个问题：存在问题、数量问题、构造问题，对于循环群这种代数系统，圆满地解决了三个问题，达到了目的.

Ⅲ 等价关系与集合的分类

设A是一个非空集合，集合B＝{有，无}. 集合A×A到B的一个映射R称为A的元素之间的一个关系，也称为集合A上的一个关系. 若R((a, b))＝有，则称a与b符合关系R，或称a与b有

关系R，记为aRb；若$R((a, b))$＝无，则称a与b不符合关系R，或称a与b没有关系R，记为$a\overline{R}b$。

设～是集合A的元素之间的一个关系，若～满足：1）反身性：$a\sim a$，任意$a\in A$；2)对称性：$a\sim b\Rightarrow b\sim a$； 3）传递性：$a\sim b$，$b\sim c\Rightarrow a\sim c$，则称关系～是一个等价关系。此时，若$a\sim b$，则称$a$与$b$等价。

若把一个非空集合A分成若干个称为类的非空子集合，使得A的每个元素属于而且只属于一个类，则称这些类的全体是A的一个分类。

若～是集合A的元素间的一个等价关系，对于$a\in A$，作$[a]=\{x\mid x\in A,\ x\sim a\}$，则称$[a]$是一个等价类，具体地说，$[a]$是$a$所在的等价类。

若～是集合A的一个等价关系，则对于a，$b\in A$，有：1）$[a]=[b]\Leftrightarrow a\sim b$；2)$[a]\neq[b]\Rightarrow[a]\cap[b]=\phi$（空集）。

集合A的一个分类决定A的元素间的一个等价关系；反之，A的元素间的一个等价关系决定A的一个分类。

Ⅳ 历史资料点滴

一 开端

阿贝尔读了拉格朗日和高斯关于方程论的著作，当他还是中学生时，就按高斯对二项方程的处理方法着手探讨高次方程可解性的问题。阿贝尔证明了高于四次的一般方程用根式求解的不可能性。阿贝尔引进了域与给定域上的不可约多项式两个概念。阿贝尔还考虑了一些能用根式求解的特殊方程，被称为阿贝尔方程。

伽罗华从中学开始就致力于研究四次以上方程的根式解法。他把欧拉、高斯、雅可比、拉格朗日等数学名家的著作找来深入钻研，潜心攻读。对同时代的数学家阿贝尔的成果，他也进行了学习和了解。他努力探索解决问题的新途径。伽罗华在拉格朗日

和阿贝尔工作的基础上，与拉格朗日一样，用了根的置换或排列的概念，而且，他指出置换的乘积仍为置换，建立了置换群的概念（当然还不是抽象群的正式定义）。伽罗华指出根的置换群表示出根的不可区分的程度，给出了找出根的置换群的方法，巧妙而简洁地论证了四次以上的代数方程可以根式解的必要充分条件。

二　群

群论的创立者是伽罗华，他为自己的方程可解性理论锻造的基本工具，就是置换群的理论，他是在严格意义上用"群"这个字的第一个人。

抽象群的概念的产生是同研究置换紧密联系着的。凯莱于1849年第一个得到群的抽象概念，强调群的结构而不强调元素的具体性质。

1858年，戴德金从置换群出发，给有限群下了一个抽象定义。1878年，他把代数数模推广，给出了一个抽象的有限交换群。他在他的代数数理论的著作中，清楚地看到了理想和域这种结构的价值。他是抽象代数的卓有成效的创始人。

1870年，克朗奈格从Kummer（1848年）关于理想数的工作出发，给出了一个相当于有限交换群的抽象定义。他规定了抽象的元素和抽象的运算，说明运算有封闭性、结合性和交换性以及任一元素的逆元素存在且唯一。

1878年，凯莱又发表了四篇文章，进一步强调群是一个普遍的概念，置换群只是它的具体表现之一。随着时间的推移和其他条件的成熟，抽象群概念终于在十九世纪的七十年代为数学界所接受。

由于柯西、凯莱、西洛、S·Lie、弗罗宾纽斯、克莱因、庞加莱、赫尔德等的宏伟工作，群论的研究大步迈进，现在已经成为分支众多的代数学学科。

三　环

抽象环的理论是二十世纪的产物．克朗奈格把环称为"序"，"环"这个字是希尔伯特引进的．

十九世纪晚期，已有大量的各种具体的线性结合代数．抽象地看，这些代数都是环．当抽象环的理论形成之际，这些具体的代数就被吸收和推广．魏特邦在建造线性结合代数方面，做了大量的工作，他的不少文章和著作，推动了结合代数理论和整个抽象代数课题的进步．

诺特是为数极少的几个伟大的女数学家之一，她把环和理想的理论置于更为系统化和公理化的基础之上．她把希尔伯特的基定理重新表述如下：一个系数环上的任何多个变量的多项式所成的环，当这系数环有一个单位元素和一组有限基时，这多项式环本身也有一组有限基．在这种重新表述下，他把不变量理论变成了抽象代数的一部分．

多项式环的理想的理论在拉斯克手下得到了发展．他给出了一种决定一个已知多项式是否属于一个理想的方法，这理想是由r个多项式生成的．1921年诺特证明，这种多项式理想理论能由希尔伯特基定理推出．诺特和其它人对环和理想的抽象理论作了非常深刻的研究，并把它应用到其它各个数学领域．

四　域

实际上，域的概念是由阿贝尔最先引进的．

在伽罗华的著作里，由n个量$a_1, a_2, \cdots, a_n$生成的域F，是指这些量经过加、减、乘、除（除数不为零）得到的量所构成的集合，而扩域这个概念就是添加F以外的一个新元素α到F所形成的．他的域就是由一个方程的系数所生成的域，他的扩域就是经添加方程的一个根而成的．在戴德金和克朗奈格关于代数数的著作里，域这个概念有着完全不同的起源．事实上，"域"（体）这个字出自于戴德金之手．

域的抽象理论是由韦伯开始的．他已经拥护群的抽象观点．

1893年他曾经给伽罗华理论以抽象的叙述，其中他引进了（交换）域作为群的派生。按照韦伯的说明，一个域是指一个由元素组成的集合，具有两种运算，称为加法和乘法，都满足封闭条件、结合律、交换律以及分配律。而且每一个元素在每一种运算下必有一个唯一的逆元素（乘法时零元素除外）。韦伯强调群和域是代数的两个主要概念。稍后，狄克森和亨廷顿给出了域的一个独立的公理体系。

§6 基本习题

1 设 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$，$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&1&5&2\end{pmatrix}$，试求$\sigma^2$，$\tau^3$，$\tau^{-1}\sigma$，$\sigma^{-1}\tau$。

2 设 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&4&1&7&5&6\end{pmatrix}$，试决定$\sigma$的奇偶性。

3 试写出6次单位根乘群U_6的乘法表，并求出U_6的所有子群。

4 对于群G中任意元素$x_1,x_2,\cdots,x_s$，成立$(x_1x_2\cdots x_s)^{-1}=x_s^{-1}x_{s-1}^{-1}\cdots x_2^{-1}x_1^{-1}$。试证明之。

5 设G，H是群，在$G\times H=\{(g,h)|g\in G,\ h\in H\}$中规定：$(g,h)(g',h')=(gg',hh')$，证明这是$G\times H$的一个代数运算，并且$G\times H$对于该代数运算作成一个群。

6 设F是域，R是环，F与R同构，证明R是域。

7 若**R**是实数域，$\overline{C}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbf{R}\right\}$，证明$\overline{C}$对于矩阵的加法与乘法作成一个域，并且$\overline{C}$与复数域**C**同构。

8 证明交换环中二项式定理成立（交换环是指其乘法适合交换律的环）。

9 n维欧氏空间V的全体正交变换作成一个群O(V)，且O(V)同构于$GLn(\mathbf{R})$的一个子群，**R**表示实数域。试证明之。

10 设R是环，$a\in R$。若有正整数n使$a^n=0$，则称a是R的一个幂零元。证明交换环R的幂零元的集合作成R的一个子环。

高等代数参考书目录

〔1〕北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组，高等代数，高等教育出版社，1978年3月第1版，1988年3月第2版。

〔2〕北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组，高等代数讲义，高等教育出版社，1965年7月第1版。

〔3〕北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组，高等代数简明教程，高等教育出版社，1966年第1版。

〔4〕王萼芳，高等代数，上海科学技术出版社，1981年7月第1版。

〔5〕王萼芳，丘维声，高等代数讲义，北京大学出版社，上册1983年5月第1版，下册1984年5月第1版。

〔6〕兰以中，高等代数教程，北京大学出版社，1988年12月第1版。

〔7〕复旦大学数学系，高等代数，上海科学技术出版社，1960年6月第1版。

〔8〕屠伯埙等，高等代数，上海科学技术出版社，1987年3月第1版。

〔9〕吉林大学数学系，高等代数，人民教育出版社，1961年6月第1版。

〔10〕王湘浩，谢邦杰，高等代数，人民教育出版社，1961年6月第1版，1964年6月第2版。

〔11〕谢邦杰，高等代简数明教程，高等教育出版社，1966年第1版。

〔12〕南京大学数学天文系，高等代数，人民教育出版社，1961年6月第1版。

〔13〕周伯埙，高等代数，人民教育出版社，1966年4月第1版。

〔14〕张禾瑞，郝炳新，高等代数，高等教育出版社，上册1957年12月第1版，下册1958年8月第1版；人民教育出版社1960年7月合订本第1版；人民教育出版社，上册1979年2月第2版，下册1979年6月第2版，合订本1980年5月第2版；高等教育出版社，1983年9月第3版。

〔15〕曹锡皋等，高等代数，北京师范大学出版社，1987年6月第1版。

〔16〕东北三省高师函授协编组，高等代数（上、下册），吉林人民出版社，1981年7月第1版。

〔17〕师专试用教材，高等代数，吉林教育出版社，1986年第1版。

〔18〕刘清祥，高绪钰等，高等代数（上、下册），吉林教育出版社，1987年9月第1版。

〔19〕贺昌亭主编，高等代数，辽宁人民出版社，1933年第1版。

〔20〕冯春龄等，高等代数，黑龙江人民出版社，1983年9月第1版。

〔21〕方嘉琳，高等代数，吉林人民出版社，上册1957年7月第1版，下册1957年11

月第1版.
〔22〕北京师范学院数学系代数教研室，高等代数，北京出版社，1979年1月第1版.
〔23〕汪经武等，高等代数，安徽教育出版社，1983年12月第1版.
〔24〕武汉教育学院等，高等代数，高等教育出版社，1988年10月第1版.
〔25〕湖南等九省教育学院数学系，高等代数概要，湖南大学出版社，1982年4月第1版 .
〔26〕熊廷煌主编，高等代数简明教程，湖北教育出版社，1987年10月第1版.
〔27〕李师正，多项式代数，山东人民出版社，1981年1月第1版.
〔28〕孔繁栋等，高等代数，上册，中南矿业学院出版社，1985年8月第1版；下册，中南矿业大学出版社，1986年2月第1版.
〔29〕许以超，代数学引论，上海科学技术出版社，1966年5月第1版.
〔30〕〔苏〕A.Г.库洛什，高等代数教程，商务印书馆，1953年8月初版；高等教育出版社，1955年9月新1版，1956年10月第2版.
〔31〕〔苏〕E.C.里亚平，高等代数教程，高等教育出版社，1956年2月第1版.
〔32〕〔苏〕П.Я.奥库湟夫，高等代数，高等教育出版社，上册1957年6月新1版，下册1958年1月新1版.
〔33〕波赫耳，高等代数学通论，商务印的馆，1935年2月初版，1951年5月第5版.
〔34〕H.E.Hawkes著，马纯德译，高等代数学，北平文化学社，1936年2月.
〔35〕M.Bôcher著，吴大任译，高等代数引论，商务印书馆.
〔36〕顾均正译，霍氏高级代数，开明书店，1947年11月初版，1948年6月再版.
〔37〕〔苏〕И.B.勃罗斯库列亚柯夫，数与多项式，高等教育出版社，1956年6月第1版.
〔38〕〔日〕弥永昌吉等，代数学，上海科学技术出版社，1962年11月第1版.
〔39〕〔苏〕A.И.乌兹科夫，代数，高等教育出版社，1958年4月新1版.
〔40〕〔英〕汉斯·里贝克，实用代数学，高等教育出版社，1985年7月第1版.
〔41〕〔美〕梧兹等，高等混合算（上卷），商务印书馆，1925年12月初版.
〔42〕〔法〕奎奈，高等数学基本教程（1·代数），高等教育出版社，1982年12月第1版.
〔43〕〔苏〕B.И.斯米尔诺夫，高等数学教程（三卷一分册），高等教育出版社，1954年9月新1版.
〔44〕郝克士著，高佩玉译，大代数，北平文化学社，1934年.
〔45〕范氏大代数，郑宗元译，上海群益书社；骈师会等译，香港中流出版社.
〔46〕〔英〕HALL-KNIGHT大代数（上、下册），席小云译，科学普及出版社，

1983年1月第1版.
〔47〕〔苏〕C.И.诺汢塞洛夫，代数与初等函数，高等教育出版社，1954年9月第1版.
〔48〕〔苏〕C.И.诺汢塞洛夫，初等代数专门教程，高等教育出版社，1956年10月第1版.
〔49〕Von.H.Weber著，郑太朴译，数学全书（第二册，代数），商务印书馆，1934年7月初版，1953年5月第3版.
〔50〕北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组，高等代数附册（习题答案与提示），高等教育出版社，1979年3月第1版.
〔51〕〔苏〕A.K.法捷耶夫等，高等代数习题集，高等教育出版社，1956年5月新1版，1987年10月修订第2版.
〔52〕鲁铁编译，高等代数演习，香港知识丛书出版社.
〔53〕徐谷生，高等代数题解，艺文书社，1946年10月第4版.
〔54〕周士藩等，高等代数解题分析，江苏科学技术出版社，1985年11月第1版.
〔55〕杨子胥，高等代数习题解，山东科学技术出版社，1982年10月第1版.
〔56〕王萼芳，高等代数题解，北京大学出版社，1983年9月第1版.
〔57〕张枚，高等代数习题选编，浙江科学技术出版社，1985年2月第1版.
〔58〕况良浩等，高等代数讲义（上册）习题解答，科学技术出版社重庆分社，1985年11月第1版.
〔59〕魏献祝，高等代数一题多解200例，福建人民出版社，1982年8月第1版.
〔60〕蔡剑芳等，高等代数综合题解，湖北科学技术出版社，1986年6月第1版.
〔61〕钱吉林等，高等代数研究生试题集锦，湖北科学技术出版社，1987年2月第1版.
〔62〕胡崇慧，代数中的反例，陕西科学技术出版社，1983年6月第1版.
〔63〕刘云英等，高等代数习作课讲义，北京师范大学出版社，1987年7月第1版.
〔64〕张远达，浅谈高次方程，湖北教育出版社，1983年8月第1版.
〔65〕乔风珠，代数方程与方程组，内蒙古人民出版社，1987年1月第1版.
〔66〕刘培娜等，一元代数方程，科学出版社，1985年10月第1版.
〔67〕余介石等，高等方程式，商务印书馆，1951年10月第1版.
〔68〕布沙特著，干仙椿译，方程式论，商务印书馆，1934年6月初版，1951年8月第4版.
〔69〕狄克逊著，黄新铎译，初级方程式论，商务印书馆，1935年7月初版，1951年6月第6版.
〔70〕何鲁，二次方程式详论，商务印书馆，1925年6月初版，1931年10月再版.

*　　*　　*　　*　　*

〔71〕二、三年制师范专科学校教学大纲（供数学专业试用），高等教育出版社，1983年3月第1版.
〔72〕教育部师范教育司，（中学教师进修师范专科）数学专业教学大纲(试用本)，北京师范大学出版社，1984年6月第1版.
〔73〕国家教育委员会师范教育司，（中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试）数学教学大纲（试用），北京师范学院出版社，1986年9月第1版.
〔74〕国家教育委员会师范教育司，（二年制师范专科学校）数学专业教学大纲，东北师范大学出版社，1989年3月第1版.
〔75〕(高等师范院校数学专业教学大纲)高等代数,高等教育出版社,1984年第1版.

*　　*　　*　　*　　*

〔76〕兰以中，线性代数引论，北京大学出版社，1981年8月第1版.
〔77〕栾汝书，线性代数，高等教育出版社，1983年9月第1版.
〔78〕陈龙玄等，线性代数简明教程，中国科学技术大学出版社，1989年2月第1版.
〔79〕复旦大学数学系，线性代数，上海科学技术出版社，1960年8月第1版.
〔80〕蒋尔雄等，线性代数，人民教育出版社，1978年8月第1版.
〔81〕谢邦杰，线性代数，人民教育出版社，1978年2月第1版.
〔82〕谢邦杰、牛凤文、董乃昌，线性代数，吉林大学出版社，1988年9月第1版.
〔83〕南京大学数学系计算数学专业，线性代数，科学出版社，1978年10月第1版.
〔84〕武汉大学数学系数学专业，线性代数，人民教育出版社，1977年7月第1版，1980年3月第2版.
〔85〕张远达，线性代数原理，上海教育出版社，1980年8月第1版.
〔86〕张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1962年12月第1版.
〔87〕王榴卿，线性代数，山东教育出版社，1983年第1版.
〔88〕黄庆祥等，线性代数，湖南教育出版社，1987年第1版.
〔89〕杨慧，线性代数，东北师范大学出版社，1988年第1版.
〔90〕刘贵荣等，线性代数，陕西科学技术出版社，1987年5月第1版.
〔91〕〔苏〕A.И.马力茨夫，线性代数基础，高等教育出版社,1957年7月新1版，1959年4月新2版.
〔92〕〔苏〕И.M.盖尔冯德，线性代数学，商务印书馆，1953年12月初版；高等教育出版社，1957年1月新1版.
〔93〕〔苏〕Г.E.希洛夫，线性空间引论，人民教育出版社，1957年10月新1版.
〔94〕〔匈〕I.FARKAS等，线性代数引论，人民教育出版社，1981年4月第1版.
〔95〕S.利普舒茨,线性代数的理论和习题,上海科学技术出版社,1981年11月第1版

〔96〕〔日〕有马哲等，线性代数讲解，四川人民出版社，1985年3月第1版．
〔97〕〔美〕N.贾柯勃逊，抽象代数学（卷2，线性代数），科学出版社，1960年3月第1版．
〔98〕李乔，矩阵论八讲，上海科学技术出版社，1988年2月第1版．
〔99〕王耕禄等，矩阵理论，国防工业出版社，1988年5月第1版．
〔100〕倪国熙，常用的矩阵理论和方法，上海科学技术出版社，1984年4月第1版．
〔101〕钱吉林，李照海，矩阵及其广义逆，华中师范大学出版社，1988年4月第1版．
〔102〕蒋正新等，矩阵理论及其应用，北京航空学院出版社，1988年3月第1版．
〔103〕曹志浩等，矩阵计算和方程求根，人民教育出版社，1979年2月第1版．
〔104〕张远达，行列式论与矩阵论，商务印书馆，1954年9月第1版．
〔105〕谢国瑞，应用矩阵方法，化学工业出版社，1988年6月第1版．
〔106〕〔苏〕Φ．P．甘特马赫尔，矩阵论，高等教育出版社，1955年2月上卷第1版，1955年3月下卷第1版．
〔107〕G.W.斯图尔特，矩阵计算引论，上海科学技术出版社，1980年1月第1版．
〔108〕J．H．威尔金森，代数特征值问题，科学出版社，1987年10月第1版．
〔109〕盛正华，线性代数与张量分析，湖南科学技术出版社，1985年1月第1版．
〔110〕王伯英，多重线性代数基础，北京师范大学出版社，1985年5月第1版．
〔111〕孙球，数值线性代数讲义，南开大学出版社，1987年第1版．
〔112〕蔡大用，数值代数，清华大学出版社，1987年9月第1版．
〔113〕屠伯埙，线性代数（方法导引），复旦大学出版社，1986年11月第1版．
〔114〕〔日〕小西荣一等，线性代数 向量分析，辽宁人民出版社，1981年1月第1版．
〔115〕〔德〕许来葛等，解析几何与代数，商务印书馆，第一册，1935年10月初版，1950年3月第3版；第二册，1946年2月初版，1950年3月第3版．
〔116〕胡莲云等，线性代数是非题200例分析，陕西科学技术出版社，1989年3月第1版．
〔117〕杨子胥，矩阵与线性方程组，山东人民出版社，1980年5月第1版．
〔118〕孙梅生等，行列式和线性方程组，科学普及出版社．
〔119〕何鲁等，行列式详论，商务印书馆，1924年6月初版，1933年3月再版．
〔120〕高扬芝，行列式浅说，江苏人民出版社，1958年5月第1版．
〔121〕藤原松三郎著，萧君绛译，行列式，商务印书馆，1936年6月初版．
〔122〕司各脱著，黄缘芳译，行列式之理论及其应用，商务印书馆，1935年1月初版，1950年3月第3版．

〔123〕南京大学数学系计算数学专业，线性代数计算方法，科学出版社，1979年 2月第1版.
〔124〕〔苏〕法捷也娃，线性代数计算法，科学出版社，1958年7月第1版.
〔125〕G. E. 福赛恩等，线代数方程组的计算机解法，科学出版社，1979年11月第1版.
〔126〕史明仁，线性代数六百证明题详解，北京科学技术出版社，1985年5月第1版.
〔127〕〔苏〕И. В. 普罗斯库烈柯夫，线性代数习题集，人民教育出版社，1981年7月第1版.
〔128〕〔日〕小西荣一等，线性代数 向量分析 习题集，辽宁人民出版社，1981年2月第1版.

* * * * *

〔129〕郭可詹，线性代数学，中国铁道出版社，1980年8月第1版，1988年9月修订版.
〔130〕程云鹏，线性代数，国防工业出版社，1982年7月第1版.
〔131〕陈凯等，线性代数及其应用，水利电力出版社，1985年10月第1版.
〔132〕周元意，线性代数，浙江大学出版社，1987年2月第1版.
〔133〕张抱膝等，线性代数及其应用，南京大学出版社，1986年3月第1版.
〔134〕萘高厅等，线性代数，天津大学出版社，1988年9月第1版.
〔135〕袁尚明，线性代数，上海交通大学出版社，1988年7月第1版.
〔136〕谢国瑞，线性代数，华东化工学院出版社，1988年10月第1版.
〔137〕俞南雁等，线性代数教程，东南大学出版社，1988年8月第1版.
〔138〕朱幼文，线性代数，同济大学出版社.
〔139〕上海交通大学应用数学系，线性代数，上海交通大学出版社，1988年5月第1版.
〔140〕孙显奕，线性代数，北京工业学院出版社，1987年6月第1版.
〔141〕范蓓芳，应用线性代数，气象出版社，1985年第1版.
〔142〕于明刚，通俗线性代数，山东教育出版社，1986年第1版.
〔143〕温欣深，罗锡佳，线性代数与矩阵方法，中南矿业大学出版社，1988年10月第1版.
〔144〕朱光贵，线性代数讲义，宇航出版社，1989年7月第1版.
〔145〕许仁忠等，线性代数，四川科学技术出版社，1988年5月第1版.
〔146〕南京工学院数学教研室，线性代数，高等教育出版社，1986年9月第1版.
〔147〕彭旭麟，线性代数，高等教育出版社，1985年3月第1版.

〔148〕上海交通大学线性代数编写组，线性代数，人民教育出版社，1978年10日第1版，1982年9月第2版.
〔149〕同济大学数学教研室，线性代数，高等教育出版社，1982年3月第1版.
〔150〕陈开明，线性代数，上海科学技术出版社，1987年4月第1版.
〔151〕雷春逵，线性代数简明教程，重庆大学出版社，1987年7月第1版.
〔152〕傅长根，线性代数，北京工业学院出版社，1987年12月第1版.
〔153〕黄午阳，线性代数（修订本），上海科学技术出版社，1984年7月第1版.
〔154〕居余马等，线性代数及其应用，中央广播电视大学出版社，1986年5月第1版.
〔155〕中国人民大学数学教研室，线性代数，中国人民大学出版社，1983年5月第1版.
〔156〕李世达，线性代数入门，四川教育出版社，1985年4月第1版.
〔157〕中央电大经济系，线性代数与线性规划，中央广播电视大学出版社，1986年6月第1版.
〔158〕李祥伦，线性代数与线性规划初步，高等教育出版社，1988年10月第1版.
〔159〕盛骤等，线性代数与数理统计，浙江大学出版社，1988年6月第1版.
〔160〕叶显驰，线性代数与常微分方程，浙江大学出版社，1989年4月第1版.
〔161〕朱俊龄，线性代数与概率统计，轻工业出版社，1989年4月第1版.
〔162〕胡林主编，线性代数学习指导，水利电力出版社，1986年5月第1版.
〔163〕戴宗儒等，线性代数学习指导，科学技术文献出版社，1989年4月第1版.
〔164〕吴声钟等，线性代数内容、方法与练习，电子工业出版社，1986年12月第1版.
〔165〕吴声钟等，线性代数复习与解题指导，北京经济学院出版社，1988年10月第1版.
〔166〕卢振有，(电视大学辅导参考)线性代数，辽宁科学技术出版社，1985年9月第1版.
〔167〕胡金德等，线性代数辅导，清华大学出版社，1986年4月第1版.
〔168〕石庆福等，线性代数辅导，中国铁道出版社，1983年9月第1版.
〔169〕魏宗宣，线性代数试题选解，中南工业大学出版社，1986年8月第1版.
〔170〕毛纲源，线性代数解题方法和技巧，湖南大学出版社，1987年11月第1版.
〔171〕胡海涛，线性代数解题分析，湖南科学技术出版社，1984年2月第1版.

*　　*　　*　　*　　*

〔172〕梁宗巨，世界数学史简编，辽宁人民出版社，1980年8月第1版.
〔173〕张奠宙，赵斌，二十世纪数学史话，知识出版社，1984年2月第1版.
〔174〕〔苏〕Б. В. 鲍尔加尔斯基，数学简史，知识出版社，1984年1月第1版.

〔175〕〔苏〕D. J. 斯特洛伊克，数学简史，科学出版社，1956年12月第1版.
〔176〕〔英〕斯科特，数学史，商务印书馆，1981年8月第1版.
〔177〕〔美〕吉特尔曼，数学史，科学普及出版社，1987年11月第1版.
〔178〕〔苏〕A. Д. 亚历山大洛夫等，数学(它的内容、方法和意义)，科学普及出版社，第一卷1958年8月第1版，第二卷1959年4月第1版，第三卷1962年5月第1版.
〔179〕〔美〕M. 克莱因，古今数学思想，上海科学技术出版社，第1册1979年10月第1版，第2册1979年8月第1版，第3册1980年11月第1版，第4册1981年7月第1版.
〔180〕〔德〕W. 盖勒特等，简明数学全书，上海科学技术出版社，第Ⅰ册1981年5月第1版，第Ⅱ册1985年9月第1版.

（袁友风）

高等代数参考文章目录

〔1〕杰，代数的译名来源，数学通报，1960年第4期，40页.

〔2〕方程简史，赣南师院学报(自然版)，1987年增刊.

〔3〕李迪，三次方程求根公式的历史，数学通报，1963年第11期，46页.

〔4〕吴鸿迈，关于韦达定理的名称，数学通报，1979年第5期，22页.

〔5〕李文汉，线性代数学简史，数学通报，1985年第8期，35页.

〔6〕张尚志译，Gauss和最小二乘法的发明，数学译林，1982年第4期,336页.

〔7〕从求根公式到群论的产生，曲阜师大学报（自然版），1986年第8期.

〔8〕乘航，纪念伽罗华诞生150周年,数学通报,1961年第7期,39页.

〔9〕黄汉平，挖掘数学矿井宝藏的青年——伽罗华，数学通报，1984年第9期，28页.

〔10〕解延年，哈米尔顿，数学通报，1987年第6期，42页.

〔11〕倪焯群译,伽罗华传，数学译林,1983年第4期，67页.

〔12〕张耀成译，代数几何和有关的代数历史漫谈,数学译林,1981年第2期，1页，第3期，27页；1982年第1期，28页，第2期，112页.

〔13〕周子平译，数学模型：数学哲学概述，数学译林，1989年第2期，136页.

〔14〕俞曙霞译，代数学的现代趋势，数学译林，1983年第4期，1页.

〔15〕张宗燧，代数在物理的应用，数学通报，1985年第8期，2页.

〔16〕蒋鼐译，线代数学的基本概念，数学通报，1956年第9期，1页；1956年第10期，1页.

〔17〕郝炳新，线性代数简介，数学通报，1962年第5期，40页；1962年第9期，29页；1962年第7期，37页；1962年第8期，31页.

〔18〕孙宗明，高等代数复习纲要，函授通讯（理科版）（泰安师专），第2期,107页；第6期，25页.

〔19〕利广才，对高等代数教学大纲的理解和执行，常德师专学报（自然版），1988年第1期，93页.

〔20〕蒋耘，高等代数教学的点滴体会，衡阳师专学报（自然版），1981年第1期，71页.

*　　*　　*　　*　　*

〔21〕许以超，多项式理论，数学通报,1987年第7期，29页;1987年第8期，32页.

〔22〕严士健，张宁生，从带余除法谈起，数学通报，1985年第10期，32页.

〔23〕孙宗明，在"带余除法定理"讲解中使用具体抽象法及探误补正法，数学教学（烟台师院），第2期，20页.

〔24〕许广胜，带余除法的一个简单证明，阜新师专学报（自然版），1986年第5期，50页.

〔25〕刘惠棠，判断多项式的整除的方法，佛山师专学报（自然版），1987年第4期.

〔26〕岳振本，多项式整除的矩阵判定，汉中师院学报（自然版），1986年.

〔27〕苗俊德，多项式带余除法定理的两种证法，宝鸡师院学报（自然版），1985年第1期.

〔28〕汪士元，多项式带余除法定理及其在一类行列式计算中的应用，阴山学刊（自然版），1988年第1期，101页.

〔29〕杜福昌等，关于$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$中$u(x)$，$v(x)$的三种求法，辽宁师大学报（自然版），1984年第1期，15页.

〔30〕曲阜师范学院数学系四年级科研小组，关于用矩阵法求多项式的最大公因式的问题，数学通报，1964年第6期，41页.

〔31〕池体涛，两多项式最大公因式的简易求法，数学通报，1961年第2期，29页.

〔32〕籍靠山，验证整系数代数方程的有理根的又一方法，数学通讯，1983年第1期，21页.

〔33〕张远达，关于多项定理中系数间的一个问题，数学通报，1953年第7期，33页.

〔34〕孙宗明，多项式互质概念的若干等价条件，开封大学学报，1989年第3期，56页.

〔35〕柳孟辉，改进综合除法与整系数多项式有理根的检定，数学通报，1981年第2期，24页.

〔36〕孙宗明，多个多项式的最大公因式，函授通讯（理科版）（泰安师专），第9期，47页.

〔37〕周子期，谈"余数定理"的证明，数学通报，1984年第8期，12页.

〔38〕李克正，"代数基本定理"的一个初等证明，数学通报，1979年第4期，30页.

〔39〕张宝琳译，代数学基本定理，数学通报，1979年第6期.

〔40〕许绍楠，代数基本定理的一个初等证明，宁夏大学学报（自然版），1985年第2期.

〔41〕胡国华，关于代数基本定理的证明，唐山师专学报（自然版），1987年第2期.

〔42〕万哲先，因式分解，数学通报，1957年第2期，6页；1957年第3期，3页.

〔43〕孙宗明，多项式的典型分解式及其应用，数学函授（内蒙古师大），1987年第2期，1页.

〔44〕何洛，关于因式分解的克朗奈克定理，数学通报，1962年第9期，24页．
〔45〕陈重穆，关于整系数多项式的因式分解，数学通报，1963年第1期，28页．
〔46〕佟文廷，关于分圆多项式既约因子的性质，数学通报，1963年第7期，37页．
〔47〕汤健儿，对“关于分圆多项式既约因子的性质”一文的意见，数学通报，1963年第10期，48页．
〔48〕李木，整系数多项式的因式分解，数学通报，1979年第1期，20页．
〔49〕马德昭，关于二次三项式的因式分解，数学通报，1963年第9期，27页．
〔50〕张群，关于Eisenstein判别法的一点注记，数学通报，1984年第10期，23页．
〔51〕郑格于，Eisenstein判别法的应用，数学通报，1988年第2期，37页．
〔52〕马跃超，整系数不可约多项式的两个判别法，数学通报，1988年第6期，20页．
〔53〕卫东舟，$x^n\pm1$在Q上的因式分解，数学通报，1988年第11期，26页．
〔54〕许小川，整系数多项式的分拆，丽水师专学报（自然版），1988年第1期．
〔55〕朱洪声，含参数的一元多项式的因式分解，云南师范大学学报（自然版），1987年第4期，40页．
〔56〕德仰淑，谈谈四次有理系数多项式的因式分解，数学通讯，1980年第6期．
〔57〕江璧奎，也谈四次有理系数多项式的因式分解，数学通讯，1983年第3期，13页．
〔58〕李圣恩，有理系数方程根的性质，数学通讯，1980年第2期，16页．
〔59〕孙宗明，虚根成对与无理根成对，函授通讯（理科版）（泰安师专），第10期，50页．
〔60〕魏金和，关于艾森施坦因判别法的一点注记，固原师专学报（自然版），1988年，49页。
〔61〕徐长林，关于艾森斯坦因判断法的几点讨论，陕西教育学院学报，1987年第3期。
〔62〕马跃超，秦宏库，与Eisenstein判别法相仿的另一种判别法的给出，铁岭师专学报，1986年第2期，73页．
〔63〕刘延新，关于方根型无理数判别法的几点补充，齐齐哈尔师范学院学报，1982年第1期，20页．
〔64〕于宝满，三次单位根在多项式整除及实数域上分解因式的应用，本溪师专学报，1986年第3期，23页．
〔65〕杨翰深，一元三次方程$x^3+px+q=0$的一个解法，数学通报，1982年第12期，11页，
〔66〕池体涛，由逐次逼近法求三次方程的根，数学通报，1961年第5期，31页．
〔67〕刘光勋，代数方程实根的一个近似计算法，数学通报，1956年第9期，8页．
〔68〕郑家驹，方程的近似根求法，数学通报，1955年第9期，11页．

〔69〕王世强等，用牛顿法求实根界限的精确性，数学通报，1955年第7期，18页．
〔70〕程廷熙，罗巴切夫斯基求实根近似值法，数学通报，1954年第8期，5页．
〔71〕逄明贤，关于“任意实系数偶次代数方程存在实根”的结论，吉林师院学报（自然版），1984年第1期，122页．
〔72〕黄学维译，恒等于零的多项式定理在三角恒等式的证明上的应用，数学通报，1963年第1期，26页．
〔73〕颜同照，对称多项式，数学通报，1963年第10期，15页．
〔74〕陈永年，关于对称多项式定理的一点注记，喀什师院学报（自然版），1987年第2期，15页．
〔75〕李德钦，用组合化简n元对称多项式，数学通报，1984年第12期，22页．
〔76〕师连城，实系数多变数二次多项式的因式分解问题，数学通报，1963年第1期．
〔77〕喻睦全，二元二次多项式可分解的充要条件，庆阳师专学报（自然版），1987年第1期，15页．
〔78〕杨尚德，域上多元多项式的最大公因子，哈尔滨科学技术大学学报，1987年第1期，112页．
〔79〕唐佑华，二元齐次对称多项式与二项式定理，数学通报，1984年第12期，27页．
〔80〕单建新，反证法在多项式理论中的应用，数学通报，1984年第9期，12页．
〔81〕吴厚强，多位综合除法，数学通报，1980年第6期．
〔82〕董名云，张教森，余数定理的推广，宁夏大学学报（自然版），1983年第1期，41页．
〔83〕李全英，韦达定理在解析几何中的应用，数学通讯，1980年第2期，27页．
〔84〕刘成群，关于一个高等代数习题的讨论，数学通报，1981年第5期，30页．
〔85〕毛慧娟，三次方程的一个解法，数学通报，1965年第3期，33页．
〔86〕王则柯，代数基本定理的一个构造性证明，数学的实践与认识，1980年第4期，49页．
〔87〕孙梅生，韩焕堂，$x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1$整除$f(x)$之条件，数学通报，1951年第10期，25页．
〔88〕韩新民，用初等变换求最大公因式，曲阜师大学报（自然版），1986年第2期，78页．
〔89〕包桐桢，利用矩阵的初等变换求n个一元多项式的最大公因通式，数学通报，1989年第2期，44页．
〔90〕蒋忠樟，多项式最大公因式的矩阵求法，数学通报，1989年第6期，23页．

*　　*　　*　　*　　*

〔91〕王世强，关于行列式理论的公理构成，数学通报，1955年第4期，18页.
〔92〕张雅静等，行列式理论的公理定义，太原重型机械学院学报，1989年第10期，56页.
〔93〕燕元音，行列式，数学通报，1957年第3期，10页；1957年第4期，4页.
〔94〕周相泉，关于行列式的一点注记，聊城师院学报（自然版），1989年第2期，30页.
〔95〕张年春,李爱华，条件全排列种数的行列式计算法,数学通讯，1983年第1期，28页.
〔96〕孙定浩，范德曼德行列式的一个性质，数学通报，1963年第9期，48页.
〔97〕张远达，凡得蒙行列式的若干应用，数学通讯，1980年第2期，1页.
〔98〕曲陆，行列式的几种常用算法，数学通报，1965年第10期，31页.
〔99〕卢业广，行列式各项符号的确定法则，数学通报，1982年第10期，25页.
〔100〕尹景尧，有关n阶行列式的两个不等式及R^n中平行多面体的体积极值问题，数学通报，1983年第2期，25页.
〔101〕李兆仁，关于n阶行列式的一个等式，数学通报，1983年第9期，26页.
〔102〕周德襄，关于加边行列式的展开定理，数学通报，1984年第8期，27页.
〔103〕彭明海，谈“关于n阶行列式的一个等式”，数学通报，1986年第5期，42页.
〔104〕李金山，浅谈n阶行列式的计算问题，德州师专学报（自然版），1988年第2期，1页.
〔105〕周士藩，两个有趣的行列式性质，商丘师专学报(自然版)，1988年第1期.
〔106〕周长生，谈谈行列式的计算，固原师专学报（自然版），1988年，40页.
〔107〕赵振威，n阶行列式的若干解题思路，苏州师专学报（自然版），总第4期.
〔108〕万明柱，杨启昌，行列式的“中心展开”定理，鞍山师专学报(自然版)，1984年第3期，101页.
〔109〕杨启昌，Vandermonde行列式的一个应用，鞍山师专学报（自然版），1987年第4期，1页.
〔110〕张福基等，行列式的图论定义，新疆大学学报（自然版），1988年第4期，6页.

*　　*　　*　　*　　*

〔111〕丙辛，线性方程组的解法，数学通报，1961年第1期，38页.
〔112〕张益敏，线性方程组的同解变换与初等变换，数学通报，1985年第8期，38页.
〔113〕钟育彬，关于线性方程组的进一步讨论，数学通报，1987年第6期，35页.
〔114〕钟育彬，线性方程组及其限制解的讨论，广州师院学报（自然版），1987年

第 1 期，106页.
〔115〕张兆君，线性方程组的图解法，昌濰师专学报（自然版），1988年第 1 期，40页.
〔116〕林祺桐，关于实系数非齐次线性方程组的进一步讨论，宁德师专学报（自然版），1988年第 1 期.
〔117〕阎家雍，一种求解线性方程组的方法，大连铁道学院学报，1989年第 1 期，7 页.
〔118〕袁俊伟，关于线性方程组的基本定理，鄂西大学学报，1987年第 7 期.
〔119〕线性代数方程组的一种新解法，扬州师院学报（自然版），1986年第 2 期.
〔120〕向大晶，关于Cramer法则的证明，数学通报，1988年第12期，25页.
〔121〕杨子胥，关于Cramer法则和线性方程组基本定理，数学通报，1986 年 第 9 期，32页.
〔122〕杨子胥，Cramer法则的推广，数学通报，1983年第 4 期，29页.
〔123〕张志贵，克兰姆法则的又一推导，数学通报，1984年第10期，25页.
〔124〕徐震，关于Cramer定理的另一证明，辽宁师范学院学报（自然版），1979年第 4 期，94页.
〔125〕佟文廷，初等变换的记录矩阵法，数学通报，1964年第 9 期，46页.
〔126〕林海明，一类对称方程组的解，数学通报，1983年第 4 期，33页.
〔127〕王传新，线性方程组的命题方法，辽宁师大学报（自然版），1987年第 4 期，94页.
〔128〕刘永刚，用集合与映射刻划一般线性方程组的解的结构，铁岭师专学报，1989年第 2 期，75页.
〔129〕路见可，一次联立方程组的逐次近似解法，数学通报，1954年第12期，14页.
〔130〕姜国贵，解线性方程组的迭代法及其迭代过程的收敛条件，数学通报，1963年第 5 期，41页.
〔131〕陈至达，某种一次联立方程组的准确解法，数学通报，1955年第 9 期，8 页.
〔132〕卢虎，关于方程组$A'AX=A'B$的解及其在欧氏空间中意义的讨论，青海师范大学学报（自然版），1986年第 1 期，77页.
〔133〕周学圣等，线性方程组的降阶消去法，山东工业大学学报，1989年第 1 期，49页.
〔134〕顾安娜，相容线性方程组的有关反问题，曲阜师大学报（自然版），1989 年第 1 期，55页.
〔135〕王世强，结式定理的一种证明，数学通报，1955年第 2 期，5 页.

〔136〕王炳安，计算结式的一种方法，数学通报，1985年第12期，41页.
〔137〕谢邦杰，二元高次联立方程的解的个数问题，数学通报，1956年第1期，4页.
〔138〕苏鸿斌，一元二次方程有公共解的判别法，数学通报，1984年第10期，26页.
〔139〕孙维君，一类特殊高阶方程组的有解判定及解法，淄博师专学报（自然版），1987年第4期，31页.
〔140〕李宁安，关于高次不定方程 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{p_i} = S$ 整数解的一个关系式，庆阳师专学报（自然版），1987年第1期，75页.

*　　*　　*　　*　　*

〔141〕罗国光，从A $p(n)$方阵得来的定理，数学通报，1953年第10期，39页.
〔142〕陈公宁，二阶矩阵概述，数学通报，1979年第2期，1页；1979年第4期，1页.
〔143〕吴福光，关于矩阵代数中几个公式的证明，数学通报，1981年第1期，29页.
〔144〕李夫林，循环矩阵的几个性质，数学通报，1982年第2期，30页.
〔145〕段海豹，柯西公式的一些应用，数学通报，1982年第7期，25页.
〔146〕冯贵良，广义范得蒙矩阵和广义柯西矩阵，数学通报，1982年第7期，28页.
〔147〕曲陆，矩阵的逆，数学通报，1982年第8期，29页.
〔148〕罗崇捷，关于用伴随矩阵求逆阵的推导，数学通报，1983年第3期，28页.
〔149〕2×2矩阵的平方根，数学通报，1983年第4期，23页.
〔150〕李宗铎，求逆矩阵的一个方法，数学通报，1983年第11期，27页.
〔151〕邓家产，关于n阶矩阵m次方幂的通项公式问题，数学通报，1984年第8期，23页.
〔152〕郑玉美，用矩阵分解多项式的一次整因式，数学通报，1982年第9期，23页.
〔153〕李庆国，二行n列式在数列方面的应用，数学通报，1985年第2期，44页.
〔154〕杨子胥，用分块矩阵证明矩阵秩的一些性质，数学通报，1985年第3期，40页.
〔155〕姚存峰，利用四分块矩阵求n阶行列式的值，数学通报，1987年第10期，40页.
〔156〕章秋明，关于行初等变换的定理及其应用，数学通报，1987年第10期，43页.
〔157〕张雁阁，关于矩阵$A^{-1}B$的简捷计算，数学通报，1986年第4期，41页.
〔158〕姚存峰，循环矩阵的逆，数学通报，1986年第10期.
〔159〕顾安娜，复数域上非奇异矩阵A＋iB的逆矩阵，曲阜师大学报（自然版），1986年第1期，42页.
〔160〕张维和，分块矩阵的初等变换，阜阳师院学报（自然版），1986年第2期，21页.

〔161〕张景晓，分块矩阵的初等变换，德州师专学报（自然版），1988年第2期，16页.
〔162〕刘家业，关于用初等变换求逆阵方法的探讨，许昌师专学报（自然版），1988年第1期.
〔163〕李长寿，系数为$m\times n$矩阵的矩阵方程，江汉大学学报（自然版），1988年第1期.
〔164〕孙天名，阶梯形矩阵及其应用，上饶师专学报（自然版），1988年第2期.
〔165〕范如林，列(行)满秩矩阵与弱逆矩阵及其应用，邵阳师专学报（自然版），1988年第1期.
〔166〕余金钟，可逆三角阵之逆方阵的求法，周口师专学报（自然版），1988年第1期.
〔167〕寇福来，矩阵在多项式理论中的一个应用，张家口师专学报（自然版），1988年第2期.
〔168〕杨直中，伴随矩阵的性质及证明，云南师大学报(自然版)，1988年第2期，11页.
〔169〕姚克澜，论初等矩阵之性能，九江师专学报（自然版），1987年第2期.
〔170〕顾安娜，关于矩阵方程MX＝N，昌淮师专学报（自然版），1987年第4期.
〔171〕周士藩，矩阵的积是幂等矩阵的特性，宁夏大学学报（自然版），1987年第1期.
〔172〕王正文，矩阵方程AX＝B的一种解法，山东师大学报（自然版），1987年第2期.
〔173〕刘麦学，谈矩阵的方幂计算，洛阳师专学报（自然版），1987年第1期.
〔174〕张作飞，对求特殊分块矩阵的逆矩阵的另一方法的注记，零陵师专学报(自然版)，1987年第1期.
〔175〕山玉林，用线性方法求矩阵的逆，楚雄师专学报（自然版），1987年第4期.
〔176〕田正平，整数矩阵平方和的表示，杭州师院学报（自然版），1987年第2期.
〔177〕彭明海，利用矩阵探讨辗转相除的几个有关问题，吉首大学学报(自然版)，1987年第1期.
〔178〕姜印中，关于几类矩阵方程的解法，江汉大学学报（自然版），1986年第2期.
〔179〕周士藩，一些广义逆矩阵类的有效表征，江苏师院学报(自然版)，1980年第1期，18页.
〔180〕向光心，矩阵方程的简捷解法，广西师院学报（自然版），1989年第2期，62页.

〔181〕韩世忠，两个矩阵相乘的另一种方法，邵阳师专学报(自然版)，1987年第 1 期，6 页。
〔182〕梁宝琪，关于分块初等变换，沈阳师院学报(自然版)，1988年第1期，15页。
〔183〕李日光，矩阵函数级数的一致收敛性，广西师院学报(自然版)，1987年。
〔184〕陈跃辉，一个矩阵极值问题，漳州师院学报(自然版)，1989年第1期，50页。
〔185〕宋宝和，矩阵的两种位置变化，聊城师院学报（自然版），1989年第1 期，30页。
〔186〕周士藩，关于复数矩阵A＋iB的秩数，许昌师专学报（自然版），1989 年第 1 期，18页。
〔187〕王路群，矩阵的广义秩，黑龙江大学学报(自然版)，1989 年第2 期，4 页。
〔188〕张双义，可逆的循环矩阵的一种求法，宁夏教育学院学报(理科版)，1989 年第 1 期，46页。
〔189〕赵振奇，逆阵及其求法，开封大学学报，1987年第 1 期，63页。
〔190〕刘学圃，矩阵的广义乘法及其应用，衡阳师专学报（自然版），1987年 第 2 期，1 页。
〔191〕徐世明，关于逆矩阵的一些充要条件，成都大学学报（自然版），1988年 第 2期，59页。
〔192〕利广才，浅谈矩阵的等价，常德师专学报(自然版)，1987年，第63页。
〔193〕田应福，幂等矩阵的性质及其应用，安顺师专学报，1988年第 2期，77 页。
〔194〕查金茂，关于矩阵的Moore－Penrose广义逆的求法，华中师大学报（自然版），1989年第1 期，25页。
〔195〕高续廷，关于逆矩阵求法的探讨，青岛师专学报（自然版），1988 年 第 3 期，14页。
〔196〕杨一新，纯量矩阵的一些性质，曲阜师大学报（自然版），1989年第1 期，40页。
〔197〕郝同壬，关于用分块矩阵法求逆阵，广东工学院学报，1988年第 2 期，111 页。
〔198〕高殿伟，广义循环矩阵，辽宁师大学报（自然版），1988年第2期，7 页。
〔199〕杨忠鹏，广义循环矩阵及其代数性质初探，吉林师院学报（自然版），1984 年第 1 期，125页。
〔200〕陈学金，关于分块矩阵的一个定理的应用，锦州师院学报（自然版），1989 年第 1 期，18页。
〔201〕陈之琢，矩阵的秩的几何意义，鞍山师专学报，1984年第3 期，105页。

〔202〕颜荣方，矩阵论中几个定理的概率证明，西北师院学报（自然版），1987年第2期，71页.

〔203〕周士藩，矩阵g-逆的一些等价命题，新疆大学学报（自然版），1985年第4期，110页.

〔204〕高安民，分块矩阵的初等变换，陕西师大学报（自然版），1980年，44页.

〔205〕周程万，对伴随矩阵的一点探讨，抚州师专学报（自然版），1985年第1期，71页.

〔206〕朱日照，循环阵的奇异性判定，东疆学刊，1985年，57页.

〔207〕孙玉祥，实方阵的秩的下界，吉林师院学报(自然版)，1987年第2期，30页.

〔208〕杨忠鹏，王典，求A的{2}逆的一种直接法，吉林师院学报（自然版），1987年第2期，36页.

〔209〕林永法，用初等变换求矩阵的广义逆矩阵，汉中师院学报（自然版），1988年第2期，17页.

〔210〕张永胜，几种矩阵方程的简单解法，辽阳石油化专学报，1988年第1期，6页.

〔211〕昔秀峰，关于关联矩阵的一个定理的证明，喀什师院学报(自然版），1988年第3期,23页.

〔212〕王伟贤，矩阵不可约的充要条件，数学的实践与认识，1988年第4期，40页.

〔213〕刘黄轩，论加边矩阵的逆矩阵，江西科学，1988年第3期，17页.

〔214〕王金龙，关于推广Vandermonde矩阵的一个注，山西大学学报（自然版），1988年第4期，18页.

〔215〕常福全，用Cayley-Hamilton定理直接求有理分式矩阵的逆矩阵，浙江工学院学报，1988年第3期，31页.

〔216〕张晓京等,求广义逆矩阵的一种算法,南京邮电学院学报,1988年第2期,121页.

〔217〕陈凤仁，多项式代数中的矩阵方法，大庆师专学报（自然版）,1988年第1期，19页.

〔218〕于宝业，用分块矩阵的性质计算行列式,唐山师专、唐山教育学院学报（自然版），1988年第3期，8页.

〔219〕王国栋，次-矩阵的广义逆性质，云南大学学报（自然版），1988年第1期.84页.

〔220〕周厚春，有限次伴随矩阵的计算公式及其性质，临沂师专学报（自然版），1987年，8页.

*　　　*　　　*　　　*　　　*

〔221〕曹德超，二次型的条件正定和条件负定，数学通报，1980年第11期，21页.

〔222〕孙宗明,二次型与对称矩阵,函授通讯（理科版)(泰安师专）,第4期，3 页.
〔223〕高吉全，吴丹桂，二次型理论的一个应用，景德镇教育学院学报（自然版),1987年第2期，27页.
〔224〕方献亚，正定实对称矩阵的几个不等式，数学通报，1985年第3期，51页.
〔225〕李炯生，实方阵的正定性，数学通报，1985年第3期，67页.
〔226〕逄明贤，李庆春，正定矩阵的若干性质，吉林师院学报（自然版），1987年第2期，14页.
〔227〕周士藩，关于正定矩阵的一个行列式不等式，宁夏大学学报（自然版），1983年第1期，40页.
〔228〕宋旭东等，正定矩阵的几点注记，许昌师专学报（自然版），1988年第2期，100页.
〔229〕李炯生，关于正定实方阵的注记，高校应用数学学报，1988年第3期，346页.
〔230〕于继业,对称矩阵特征值问题的雅可比解法,海洋学报，1988年第1期，95页.

*　　*　　*　　*　　*

〔231〕张远达，n维向量间的一个问题，数学通报，1955年第10期，11页.
〔232〕裘光明，向量，数学通报，1956年第4期，2页.
〔233〕赵维儒，n维向量组的线性相关性，青岛化工学院学报,1989年第2期,91页.
〔234〕谭正俭，向量线性相关性例析，阜阳师院学报（自然版），1985年第1期.
〔235〕杨直中，用初等变换求极大无关组，昭通师专学报（自然版），1987年.
〔236〕叶克仁，对《高等代数》中替换定理的进一步理解，丽水师专学报(自然版).
〔237〕甘式辛，替换定理的拓广，玉林师专学报（自然版），1988年.
〔238〕雷中平，向量空间的"整体性"及其他，数学通报，1966年第1期，43页.
〔239〕姜久亮，对向量空间定义的注记，重庆师专学报（数学版)，1988年第3期，21页.
〔240〕费国方，向量空间的拓广，咸宁师专学报（自然版），1988年第2期.
〔241〕王凯宁，关于线性空间的定义，数学通报，1980年第11期，20页.
〔242〕赵宝璋，向量空间定义中一公理的独立性，数学通报，1983年第4期，25页.
〔243〕沈泽琪，关于向量空间定义中第六条公理的独立性，西南师院学报（自然版），1984年第1期，52页.
〔244〕孙川，向量空间定义中运算公理的独立性，郧阳师专学报（自然版），1987年第2期.
〔245〕袁振邦，关于向量空间的定义，西南师院学报（自然版），1982年第3期，37页.

〔246〕王琦，也谈"向量空间公理独立性"问题，吉林师院学报（自然版），1984年第1期，131页。

〔247〕李传正，线性空间替换定理的一个证明，数学通报，1987年第10期，39页。

〔248〕常时炜，林福荣，线性无关向量组的扩充，数学的实践与认识，1987年第4期，25页。

〔249〕陈世樵，子空间的交的基与维数的一种确定方法，数学通报，1987年第11期，37页。

〔250〕龙德明，向量空间基和维数的等价定义及求法，成都师专学报（理科版），1989年第1期，24页。

〔251〕吴昌悫，线性空间若干问题的矩阵变换图解，工科数学，1988年第3期，16页。

〔252〕刘泽庆，关于维数公式的推广及直和的充要条件，辽宁师大学报（自然版），1985年第4期，10页。

〔253〕吴永康，有限维线性空间两种分解的关系，南通师专自然科学论文集，1985年，32页。

〔254〕孙宗明，线性空间V（P，n）的基数，泰安师专学报（自然版），1985年，23页。

〔255〕张庆德，n维空间中子空间的构造及个数，聊城师院学报（自然版），1988年第1期，75页。

〔256〕孙宗明，线性空间的子空间之直和的等价条件，南充师院学报（自然版），1988年第1期，51页。

〔257〕张星之等，子空间的并仍为子空间的条件，武汉教育学院学报（自然版），1987年第2期，18页。

〔258〕李启越，关于维数公式的讨论，湖南教育学院学报（自然版），1988年第1期，89页。

〔259〕唐佑华，一类维数等于不定方程$n_1+2n_2+\cdots+kn_k=n$的非负整数解组个数的线性空间，湘潭大学学报（自然版），1987年第4期，15页。

〔260〕辛未，关于向量空间射影的和，河南大学学报（自然版），1988年第2期，4页。

〔261〕郑文祥，有限维与无限维线性空间的区别，曲阜师大学报（自然版），1988年第4期，170页。

〔262〕王力军，曹佩，无限维向量空间，内蒙古师大学报（自然版），1987年第1期，56页。

〔263〕胡明，无限维向量空间的同构，景德镇教育学院学报（自然版），1987年第2期，23页.

*　　*　　*　　*　　*

〔264〕蒋万菱，关于线性变换的两个定理，西南师大学报（自然版），1987年第3期，94页.

〔265〕黎前修，关于线性变换的两个命题，重庆师专学报（自然版），1988年第3期，62页.

〔266〕朱有仁，向量空间的线性变换与基变换，宝鸡师院学报（自然版），1987年第1期.

〔267〕徐希贤，线性变换和线性方程组，工科数学，1988年第3期，21页.

〔268〕孙宗明，数乘变换的若干等价条件,常德师专学报(自然版),1987年，38页.

〔269〕周士藩，可逆线性变换剖析，苏州大学学报（自然版），1987年第4期.

〔270〕樊启毅，子空间上线性变换的延拓，常德师专学报（自然版），1986年.

〔271〕钱正方,Hamilton-Cayley定理及最小多项式公式的简明证法，成都电讯工程学院学报，1988年第3期，281页.

〔272〕杨忠鹏，关于置换矩阵的最小多项式，曲阜师大学报（自然版），1989年第3期，83页.

〔273〕孙宗明，Mn（P）的相似分类与LV（P，n）的相似分类，曲阜师院学报（自然版），1983年第1期，50页.

〔274〕陈兴龙，矩阵特征多项式的一种求法，数学通报，1988年第9期，28页.

〔275〕胥鸣伟译，Cayley-Hamilton定理的一个逆定理，数学译林，1986年第4期，247页.

〔276〕张耀成译，不变子空间，数学译林，1981年第2期，54页.

〔277〕刘绍学，变换、标准型与计算方法，数学通报，1962年第10期，24页.

〔278〕廖鸿志，幂法求特征值的若干问题，云南大学学报（自然版），1988年第4期，289页.

〔279〕汪惠民，关于矩阵特征值的一种表达方式，安徽大学学报（自然版），1988年第4期，7页.

〔280〕陈灵，矩阵迹数的几个不等式的推广，暨南理医学报,1988年第3期，6页.

〔281〕秦奋涛等，相似矩阵的特征向量间的关系，张家口师专学报（自然版），1987年第2期，40页.

〔282〕陈则民,计算一类矩阵特征值的迭代法,天津轻工业学院学报，1988年第1期，59页.

〔283〕华罗庚，华苏，具有左右二正特征矢量的实方阵的研究，数学通报，1985年第8期，30页。

〔284〕孔令颐，从一次齐次递推公式求通项的特征根法的一个初等证明，数学通报，1987年第12期，35页。

〔285〕高祥山，相似矩阵的标准形及其应用，沈阳师院学报（自然版），1988年第2期，19页。

〔286〕袁玉玲，简化阶梯形矩阵及其应用，曲阜师院学报（自然版），1983年第2期，27页。

〔287〕孙宗明，线性变换的矩阵成为准对角形的条件，函授通讯（理科版）（泰安师专），第7期，39页。

〔288〕刘许成，可对角化矩阵的一个判据，昌潍师专学报（自然版），1988年第2期。

〔289〕钟子玉，有关矩阵迹的一些不等式，娄底师专学报（自然版），1988年第9期。

〔290〕赵九菊，矩阵可对角化的一个判别法，洛阳师专学报（自然版），1987年第1期。

〔291〕王宽小，使$P^{-1}AP$为对角形矩阵一种求P的方法，包头师专学报（自然版），1987年。

〔292〕薛国良，关于矩阵迹数的几个不等式及其应用，曲阜师院学报（自然版），1984年第4期。

〔293〕王青义，高玉金，伴随矩阵的谱及对角化的条件，吉林师院学报（自然版），1984年第1期，133页。

〔294〕苏双飞等，反对称循环实矩阵的对角化，长沙铁道学院学报，1989年第1期，75页。

〔295〕姚存峰，某些特殊矩阵同时对角化的问题，济宁师专学报（自然版），1987年第1期，3页。

〔296〕林永法，关于矩阵迹的不等式，华侨大学学报（自然版），1988年第3期，285页。

〔297〕杨延龄，矩阵的拟相似，北京轻工学院学报，1988年第1期，84页。

〔298〕李坪皆，矩阵可对角化的充要条件，广东教育学院学报（自然版），1988年第3期，28页。

〔299〕刘甲顺等，对称及反对称三对角矩阵的特征向量，曲阜师大学报（自然版），1988年第4期，74页。

〔300〕张双义，周期矩阵对角化的一种方法，宁夏教育学院学报（自然版），1987年第2期，1页。

〔301〕朱和平，线性变换的矩阵可对角化的条件，淮阴教育学院学报（自然版），1988年第3期，1页.
〔302〕徐一青，关于方阵相似的一个问题，数学通报，1981年第12期，25页.
〔303〕周士藩，对合矩阵相似于对角矩阵的一个简单性质，数学通报，1982年第5期，27页.

*　　*　　*　　*　　*

〔304〕张家骅，复数域上矩阵可用相似变换化为对角形的一个充要条件，数学通报，1963年第10期，34页.
〔305〕戴宗铎译，若当标准形的一个算法推导，数学译林，1985年第3期，254页.
〔306〕导出若当法型的一个简单方法，数学通报，1964年第9期，49页.
〔307〕郑格于，Jordan标准形的一个证法及Hamilton定理的推广，郧阳师专学报（自然版），1984年第1期，1页.
〔308〕汀汲湘，方阵相似标准形，数学通报，1965年第6期，30页.
〔309〕姚樵耕等，矩阵约当化法的研究，纺织学报，1989年第1期，95页.
〔310〕王文省，关于Jordan标准形与Frobenius标准形，聊城师院学报（自然版），1989年第2期，14页.
〔311〕陈群，带余除法在λ-矩阵多项式中的推广，淮阴教育学院学报（理科版），1988年第3期，17页.
〔312〕孙昭洪，求初等λ-矩阵的行列式的一个简便方法，昭通师专学报（自然版）1988年，9页.
〔313〕刘新国，几类特殊的矩阵多项式，山东海洋学院学报，1988年第2期，74页.
〔314〕高明哲，矩阵的若当分解及应用，湘西教育学院学报（自然版），1987年第1期.
〔315〕詹仕林，利用λ-矩阵的初等变换求多项式的最大公因式，韩山师专学报（自然版），1986年.
〔316〕周士藩，徐展，适合$\lambda^2+a\lambda+b=0$的方阵相似于若当标准形的一个简单方法，辽宁师大学报（自然版），1985年第2期，7页.

*　　*　　*　　*　　*

〔317〕伍秉伦，有限维欧氏空间里内积的一般表示方法，湘西教育学院学报（自然版）.
〔318〕庄吉全，张汶，欧氏空间的引进，东疆学刊，1985年，101页.
〔319〕朱鼎勋，N维欧氏空间中向量的乘法，安阳师专学报(自然版)，1985年第1期.
〔320〕夏泽苗，欧氏空间Cauchy不等式的应用，益阳师专学报（自然版），1986年

第2期.
〔321〕欧其焕，布尼雅可夫斯基不等式的推广，数学通报，1955年第11期，17页.
〔322〕蔡大志，一种正交化方法，数学通报，1986年第4期，43页.
〔323〕孙宗明，欧氏空间的标准正交基的四组特征性质，开封大学学报，1989年第1期，43页.
〔324〕邱岫岩，关于欧氏空间变换的一个注记，辽宁师院学报（自然版），1979年第4期，43页.
〔325〕杨子胥，欧氏空间中的线性变换，山东师大学报（自然版），1987年第2期，149页.
〔326〕邱淦梯，浅谈线性变换与对称变换的关系，宁德师专学报（自然版），1985年第1期.
〔327〕严家森，关于正交变换的两个问题，南充师院学报（自然版），1988年第1期，47页.
〔328〕仇永平，合同变换正交化方法，曲阜师大学报（自然版），1988年第1期，70页.
〔329〕卜淑云，关于R^n的线性变换的"一次齐次性"和"连续性"，广西师大学报（自然版），1987年第3期，18页.
〔330〕黄根荣，矩阵次转置和Euclid空间与U空间上的一类线性变换，温州师院学（自然版），1987年，13页.
〔331〕杨仲华，正交变换在数学分析中的某些应用，数学通报，1981年第5期，30页.
〔332〕刘人骊，正交变换的类型问题，数学通报，1984年10月，23页.
〔333〕丁树良，两个非负定矩阵乘积的特征值估计，江西师大学报（自然版），1984年第4期，17页.
〔334〕曾广兴，关于两个负定矩阵乘积的特征值的一个问题，江西师大学报（自然版），1989年第1期，15页.
〔335〕李学良，关于方阵分解的一个问题，数学的实践与认识，1985年第4期，57页.
〔336〕郝稚传，关于厄米特矩阵的一个不等式，数学的实践与认识，1985年第4期，59页.
〔337〕张福基，"关于厄米特矩阵的一个不等式"的几点注记，数学的实践与认识，1987年第2期，60页.
〔338〕刘森，化实对称矩阵成对角形的两个技巧，数学通报，1987年第9期，39页.
〔339〕刘建洲，与正定Hermite矩阵有关的一类不等式，高等数学，1987年第4期，43页.

〔340〕蒋念生，实对称矩阵的某些不等式，西南师大学报（自然版），1987年第4期，22页。

〔341〕卢业广，次对称矩阵和次正交矩阵，工科数学，1989年第1期，13页。

〔342〕刘钊南，正交矩阵的作用，湘潭师院学报（自然版），1987年第2期，10页。

〔343〕叶怀安，关于无限维欧氏空间中的直交子空间的直交补，数学通报，1983年第6期，29页。

〔344〕田校贵，无限维欧氏空间和有限维欧氏空间在正交性上的差异，数学通报，1982年第6期，26页。

〔345〕冯浩鉴，矩阵代数在最小二乘法中的应用，数学通报，1963年第6期，131页。

〔346〕邵品琮，最小二乘法介绍，数学通报，1963年第7期，27页。

〔347〕安鸿志，最小二乘法在滤波中的应用，数学的实践与认识，1972年第6期，73页。

〔348〕邵品琮，关于修正最小二乘法的计算，数学通报，1987年第8期，38页。

* * * * *

〔349〕华德康，有限维内积空间的一些性质，北京师院学报（自然版），1988年第4期，9页。

〔350〕迟培英，在一般内积空间上的Kronecker乘积，哈尔滨科学技术大学学报，1988年第3期，107页。

〔351〕殷志建，关于张量的定义，数学通报，1964年第12期，35页。

〔352〕朱忠南，子空间次正交与反对称张量空间中可合元素的关系，南京大学学报(自然版)，1988年第4期，743页。

〔353〕刘国隆等，双线性变换的递推统一算法，华北电力学院学报，1988年第1期，75页。

〔354〕袁俊伟，关于三元线性型的Frobenius问题，西南师大学报（自然版），1987年第3期，10页。

* * * * *

〔355〕千溪，谈谈集合的基数，数学通报，1979年第2期，22页。

〔356〕金成梁，谈关系，数学通报，1980年第8期，5页。

〔357〕孙梅生，运算律，数学通报，1962年第10期，40页。

〔358〕孙梅生，有理化因子的存在和求法，数学通报，1957年第11期，12页。

〔359〕蒋魏，关于分圆问题，数学通报，1957年第8期，1页。

〔360〕邵品琮，关于三分角问题的近似作图法问题，数学通报，1963年第10期，27页。

（孙宗明）

附录一　扩域与尺规作图

本文中，我们首先建立扩域的概念，研究扩域的结构；而后建立有限扩域的概念，研究扩域的次数；再建立代数单扩域的概念，研究其结构；最后，解决尺规作图问题．

定义 1　若域F是域E的一个子域，则称域E是域F的一个扩域（扩张）．

研究域的理论称为域论．域论的研究方法是：从一个给定的域F出发，来研究它的扩域，从而找出F的所有扩域．

下面粗略描述一下扩域的结构，为此，引入

定义 2　设E是域F的一个扩域，S是E的一个子集合，E的包含F和S的最小子域记为F(S)．即，若E_1是E的一个子域，$F\subseteq E_1$，$S\subseteq E_1$，则$F(S)\subseteq E_1$，此时，称F(S)是添加S于域F所得的扩域．

定理 1　若E是域F的一个扩域，S是E的一个子集合，则F(S)是存在的，且

$$F(S)=\{f_1(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)/f_2(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\}$$

其中$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in S$，$f_1,f_2$是F上的$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$的多项式，且$f_2\neq 0$．

证明　1)F(S)的存在性．E确有包含F与S的子域，如E自身即是，从而，一切这样的子域的交集是存在的，记为E_2，则$E_2=F(S)$．事实上，首先，$F\subseteq E_2$，$S\subseteq E_2$；其次，对于E的任一子域E_1，若$F\subseteq E_1$，$S\subseteq E_1$，则由于E_2是E的包含F与S的一切子域的交集，所以$E_2\subseteq E_1$．因此，由定义 2 得，$E_2=F(S)$．

2)为简单，记

$$M=\{f_1(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)/f_2(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\}$$

则容易证明M作成F(S)的子域，从略．又易知M包含F及S，于是$F(S)\subseteq M$．所以，F(S)=M．证完．

定理 2　若E是域F的一个扩域，S_1和S_2是E的两个子集，则$F(S_1)(S_2)=F(S_1\cup S_2)=F(S_2)(S_1)$．

证明　1)先证明，$F(S_1)(S_2)=F(S_1\cup S_2)$．

易知，$F(S_1)(S_2)$是E的包含F，S_1，S_2的一个子域，而$F(S_1\cup S_2)$是E的包含F，S_1，S_2的最小子域，所以，$F(S_1\cup S_2)\subseteq F(S_1)(S_2)$．另一方面，由于$F(S_1\cup S_2)$包含F，$S_1$，$S_2$，所以包含$F(S_1)$，$S_2$，而$F(S_1)(S_2)$是E的包含$F(S_1)$，$S_2$的最小子域，因此，$F(S_1)(S_2)\subseteq F(S_1\cup S_2)$．

2)同样可证明，$F(S_2)(S_1)=F(S_1\cup S_2)$．证完．

定义 3 当$S=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$时，$F(S)$记为$F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

从而，$F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=F(\alpha_1)(\alpha_2)\cdots(\alpha_n)$.

这样，添加一个有限集合归结为陆续添加单个元素，而添加任意集合可以视为添加若干有限集合的并集，化为陆续添加有限集合，于是，扩域的问题就可变为添加单个元素的问题了。

定义 4 添加一个元素α于域F所得的扩域$F(\alpha)$称为域F的一个单扩域(扩张).

现在，研究有限扩域。

引理 1 假定域E是域F的一个扩域，则，对于$k\in F$及$\alpha\in E$，有$k\alpha\in E$，称为E的"数量乘法"，从而，对于E的加法及E的"数量乘法"而言，E作成F上的一个线性空间. E作为F上的线性空间，或者是有限维的，或者是无限维的.

定义 5 设E是域F的扩域. 若E作为F上的线性空间是有限维的，则称E是F的一个有限扩域，E关于F的维数称为扩域E在F上的次数，记作$(E:F)$；若E作为F上的线性空间是无限维的，则称E是F的一个无限扩域.

例 1 域F是F自身的有限扩域，$(F:F)=1$.

定理 3 若域I是域F的有限扩域，而域E是I的有限扩域，则E是F的有限扩域，而且$(E:F)=(E:I)(I:F)$.

证明 设$(I:F)=r$，$(E:I)=s$，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是I在F上的一组基，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$是E在I上的一组基，则E的$rs$个元素$\alpha_i\beta_j(i=1,2,\cdots,r;\ j=1,2,\cdots,s)$是E在F上的一组基. 事实上，

1)对于任意的$\omega\in E$，由β_j是E在I上的一组基得 $\omega=\sum_{j=1}^{s}\theta_j\beta_j,\theta_j\in I,j=1,2,\cdots,s$. 又由$\alpha_i$是I在F上的一组基得，$\theta_j=\sum_{i=1}^{r}c_{ij}\alpha_i,c_{ij}\in F,i=1,2,\cdots,r,j=1,2,\cdots,s$. 从而 $\omega=\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{r}c_{ij}\alpha_i\right)\beta_j=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}c_{ij}(\alpha_i\beta_j)$，即$\omega$可由$\alpha_i\beta_j$线性表出。

2) 对于 $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}a_{ij}(\alpha_i\beta_j)=0,a_{ij}\in F$，有 $\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{r}a_{ij}\alpha_i\right)\beta_j=0$，$\sum_{i=1}^{r}a_{ij}\alpha_i\in I$. 而$\beta_j$在I上线性无关，所以$\sum_{i=1}^{r}a_{ij}\alpha_i=0,j=1,2,\cdots,s$. 又$\alpha_i$在F上线性无关，所以$a_{ij}=0(i=1,2,\cdots,r;\ j=1,2,\cdots,s)$. 因此，$\alpha_i\beta_j$在F上线性无关.

于是，E是F上的rs维线性空间，所以，$(E:F)=(E:I)(I:F)$．证完．

实际上，定理3可以进一步推广为：若$F_1,F_2,\cdots,F_t$是域，且后一个依次是前一个的有限扩域，则F_t是F_1的有限扩域，且

$$(F_t:F_1)=(F_t:F_{t-1})(F_{t-1}:F_{t-2})\cdots(F_2:F_1).$$

定理4　设I是F的扩域，E是I的扩域．若E是F的有限扩域，则E是I的有限扩域，I是F的有限扩域，且$(I:F)$，$(E:I)$均整除$(E:F)$．

证明　1)设$(E:F)=n$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是E在F上的一组基，则由$F\subseteq I$知，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是E在I上的一组生成元素，从而$E=I(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$(E:I)\leqslant n$，E是I的有限扩域．又由$I\subseteq E$及I是F的扩域知，I是E的子空间，从而I是有限维的．

2)由定理3知，$(E:F)=(E:I)(I:F)$，从而，$(E:I)$，$(I:F)$均整除$(E:F)$．证完．

现在，研究代数单扩域．

定义6　设E是域F的扩域，$\alpha\in E$．若有不全为零的$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\in F$，使$a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_n\alpha^n=0$，即$\alpha$适合 F〔$x$〕中的一个非零多项式$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，则称$\alpha$是F上的一个代数元素．否则，称$\alpha$是F上的一个超越元素．

为了研究代数单扩域的结构，引入

定义7　设α是域F上的一个代数元素，$p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是 F〔$x$〕中的以$\alpha$为根的且次数最小的多项式，则称$p(x)$是$\alpha$的一个极小多项式，称$n$是$\alpha$在F上的次数，称$\alpha$是F上的$n$次代数元素．

关于极小多项式的性质，有下面的

定理5　设α是域F上的代数元素，则：1)α的极小多项式是存在的；2)若$p(x)$是α的一个极小多项式，$f(x)\in$F〔x〕，且$f(\alpha)=0$，则$p(x)\mid f(x)$；3) α的极小多项式是唯一的；4) F〔x〕中的首项系数为1的多项式$p(x)$是α的极小多项式$\Leftrightarrow$ $p(x)$是F〔x〕中以α为根的不可约多项式．

证明　1)由α是F上的代数元素知，F〔x〕中有非零多项式以α为根，从而这些多项式中一定有次数最小的，设$p(x)$就是其中的一个，且不妨设$p(x)$的首项系数为1，由定义7，$p(x)$即为α的极小多项式．

2)对于$f(x)\in$F〔x〕，由带余除法得$f(x)=q(x)p(x)+r(x)$，$r(x)=0$或$\deg(r(x))<\deg(p(x))$．由$f(\alpha)=0,p(\alpha)=0$得$r(\alpha)=0$，从而，当$r(x)\neq 0$时，将与$p(x)$是α的极小多项式相矛盾，所以$r(x)=0$，$p(x)\mid f(x)$．

3)设$p(x)$，$p_1(x)$均为α的极小多项式，则由2)得，$p(x)\mid p_1(x)$，$p_1(x)\mid p(x)$，从而$p(x)=cp_1(x)$，$c\in$F．但$p(x)$，$p_1(x)$的首项系数均为1，所以

$c=1$，$p(x)=p_1(x)$，即α的极小多项式是唯一的.

4)⇒. 用反证法. 设α的极小多项式$p(x)$在F〔x〕中可约，则 $p(x)=p_2(x)p_3(x)$，且 $0<\deg(p_2(x))<\deg(p(x))$，$0<\deg(p_3(x))<\deg(p(x))$，从而 $p(\alpha)=p_2(\alpha)p_3(\alpha)=0$. 由于域中没有零因子，所以$p_2(\alpha)=0$或$p_3(\alpha)=0$，引出矛盾. 因此，$p(x)$不可约.

⇐. 设$p_1(x)$是α的极小多项式，由于$p(\alpha)=0$，所以由2)得 $p_1(x)\mid p(x)$. 由于$p(x)$不可约且$p(x)$，$p_1(x)$的首项系数均为1，所以$p_1(x)=p(x)$. 证完.

关于代数单扩域的结构，有下面的

定理6　设α是F的n次代数元素，则：1)F(α)中的任一元素都可以唯一地写成F上的α的"$n-1$次"多项式；2)$F(\alpha)=F[\alpha]_{n-1}=\{a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}\mid a_i\in F\}$；3)F($\alpha$)是F的有限扩域，且$(F(\alpha):F)=n$.

证明　设α的极小多项式为$p(x)$，则$\deg(p(x))=n$.

1) 对于任意 $\beta\in F(\alpha)$，由定理1知，$\beta=f(\alpha)/g(\alpha)$，且 $g(\alpha)\neq 0$，$f(x)$，$g(x)\in F[x]$. 由于$g(\alpha)\neq 0$，所以$p(x)\nmid g(x)$. 由定理5，$p(x)$在F〔x〕中不可约，所以$(p(x), g(x))=1$，从而，存在$u(x)$，$v(x)\in F[x]$，使 $u(x)p(x)+v(x)g(x)=1$. 由于$p(\alpha)=0$,所以$v(\alpha)g(\alpha)=1$,从而$\beta=f(\alpha)/g(\alpha)=v(\alpha)f(\alpha)/v(\alpha)g(\alpha)=v(\alpha)f(\alpha)=h(\alpha)$,其中$h(x)=f(x)v(x)$.

设$h(x)=p(x)q(x)+r(x)$，$r(x)=0$或 $\deg(r(x))<\deg(p(x))$，则 $h(\alpha)=p(\alpha)q(\alpha)+r(\alpha)=r(\alpha)$. 若记 $r(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，则 $\beta=h(\alpha)=r(\alpha)=a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}$，表示为F上的$\alpha$的"$n-1$次"多项式.

再证表示的唯一性. 设还有 $\beta=a_0'+a_1'\alpha+\cdots+a'_{n-1}\alpha^{n-1}$，$a_0',a_1',\cdots,a'_{n-1}\in F$，则$(a_0-a_0')+(a_1-a_1')\alpha+\cdots+(a_{n-1}-a'_{n-1})\alpha^{n-1}=0$. 从而$\alpha$是F〔$x$〕中的多项式$k(x)=(a_0-a_0')+(a_1-a_1')x+\cdots+(a_{n-1}-a'_{n-1})x^{n-1}$的根，由定理5知$p(x)\mid k(x)$，当$k(x)\neq 0$时就引出矛盾，所以$k(x)=0$，即$a_0=a_0'$，$a_1=a_1',\cdots,a_{n-1}=a'_{n-1}$.

2) 由1)知，$F(\alpha)\subseteq F[\alpha]_{n-1}$，又，显然 $F[\alpha]_{n-1}\subseteq F(\alpha)$，所以，$F(\alpha)=F[\alpha]_{n-1}$.

3) 由1)知，$1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1}$是F($\alpha$)在F上的一组基，所以$(F(\alpha):F)=n$. 证完.

设α是域F上的n次代数元素，则F(α)的结构如下：

1) $F(\alpha)=F[\alpha]_{n-1}$；

2) 对于任意$l_1(\alpha),l_2(\alpha)\in F(\alpha)$,则$l_1(\alpha)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\alpha^i$，$l_2(\alpha)=\sum_{i=0}^{n-1}b_i\alpha^i$，

加法$l_1(\alpha)+l_2(\alpha)=\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+b_i)\alpha^i$，乘法$l_1(\alpha)l_2(\alpha)=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\alpha^i$， 其中

$l_1(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i$，$l_2(x)=\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i$，$l_1(x)l_2(x)=p(x)q(x)+r(x)$，$r(x)=$

$\sum_{i=0}^{n-1}c_ix^i$，$p(x)$是α的极小多项式．

例2 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$，$(\mathbf{Q}(\sqrt{2}):\mathbf{Q})=2$．

注 当F是域时，F〔x〕中的规则与F〔x〕（F为数域）中相同，此处不证明了，上面已经用到了这些规则．

最后，我们用扩域的理论来解决尺规作图问题．

定义8 给出了若干个初等几何图形—点、直线、圆，要求利用这些图形，并且只能使用（没有刻度的）直尺和圆规，作出满足给定条件的另外一些初等几何图形，称为直尺圆规作图，简称为尺规作图．

定义9 用直尺圆规作图时实施的步骤不外以下六种：1)在平面上任取一点；2)通过二给定点画一直线；3)以给定的一点为圆心，以给定两点的距离为半径画一个圆；4)作二直线的交点；5)作一直线与一圆的交点；6)作二圆的交点．称为直尺圆规作图的基本步骤．

容易看出，步骤1)，4)，5)，6)作点，步骤2)作直线，步骤3)作圆．

定义10 对于一个有某些性质的图形．若能够给出由有限个基本步骤组成的程序，通过这一程序，必然得到所要求的图形，则称该图形可用直尺圆规作出．

为了用代数方法来研究作图问题，我们在平面上任意选取一个笛卡尔直角坐标系，从而就有：每个点有确定的坐标(a,b)；每条直线有确定的方程$x+cy+d=0$或$y+d'=0$；每个圆有确定的方程$x^2+y^2+ex+fy+g=0$，我们限定直线与圆的方程均取这样的固定的形式，于是图形与方程将有一一对应关系．我们给出

定义11 点的坐标(a,b)，直线方程的系数(c,d)或(d')，圆的方程的系数(e,f,g)分别称为点、直线、圆的坐标，统称为图形的坐标．

这样，在取定的平面笛卡尔直角坐标系中，用直尺圆规作出几何图形的问题，也就是用代数方法找出一系列的点、直线、圆的坐标的问题，即寻绍某些具有某种性质的实数的问题．

定义12 平面上的笛卡尔直角坐标系中，坐标均为有理数的点称为有理点．

引理2 若，步骤1')：在平面的某个区域内任取一有理点，则基本步骤1)或由

1′)来完成，或由1′)、2)、4)来完成，或由1′)、2)、5)来完成．

证明 1)若在平面的某个区域内任取一点，则由有理数的稠密性可得，平面的任一区域内均有有理点，从而1)可由1′)完成．

2)若在直线上任取一点，则由1)所述，可以在该直线两边的区域内各取一有理点，再过两点作一直线，两直线相交，从而完成在直线上任取一点的工作，即由1′)2)、4)完成．

3)若在圆上任取一点，则类似于2)所述，可由1′)、2)、5)来完成．证完．

根据引理2，可以将1)改为1′)，即，取点时均假定取有理点．

定理7 设平面上给定了若干初等几何图形．在平面上建立一笛卡尔直角坐标系，将这些给定图形在该笛卡尔直角坐标系中的坐标添加到有理数域**Q**中，得到数域**F**，从这些给定图形出发，施行基本步骤1)—6)中任何一种，所得图形的坐标添加到**F**上得到扩域E，则E为有限扩域，且$(E:\mathbf{F})=1$或2．

证明 只需对于六种基本步骤分别讨论．

施行1)．根据引理2，可以用1′)代替．从而，所取的点的坐标属于**F**．因此，添加这些坐标于**F**所得的扩域$E=\mathbf{F}$，$(E:\mathbf{F})=1$．

施行2)．过给定二点(a,b)与(c,d)的直线的方程是$x+[(c-a)/(b-d)]y+(ad-bc)/(b-d)=0$（当$b\neq d$）时或$y-d=0$（当$b=d$时），从而 $E=\mathbf{F}((c-a)/(b-d),\ (ad-bc)/(b-d))$或$E=\mathbf{F}(-d)$．因为$a$，$b$，$c\in\mathbf{F}$，所以 $E=\mathbf{F}$，$(E:\mathbf{F})=1$．

施行3)．以给定点(a,b)为圆心，以给定点(c,d)与(e,f)的距离为半径的圆的方程是$x^2+y^2-2ax-2by+[a^2+b^2-(c-e)^2-(d-f)^2]=0$．因为$a,b,c,d,e,f$都属于**F**，所以 $E=\mathbf{F}(-2a,-2b,a^2+b^2-(c-e)^2-(d-f)^2)=\mathbf{F}$，$(E:\mathbf{F})=1$．

施行4)．求两条直线的交点，相当于解一个线性方程组，因为，方程组的系数，即所给直线的坐标，属于**F**，所以，方程组的解，即交点的坐标，也属于**F**，从而$E=\mathbf{F}$，$(E:\mathbf{F})=1$．

施行5)．求直线与圆的交点相当于解方程组

$$\begin{cases}x+cy+d=0\\x^2+y^2+ex+fy+g=0\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}y+d'=0\\x^2+y^2+ex+fy+g=0.\end{cases}$$

在第一种情况下，交点的坐标是

$$(\alpha_1,\beta_1)=([c(v+\sqrt{v^2-4uw})-2du]/2u,\ (-v-\sqrt{v^2-4uw})/2u)$$

$$(\alpha_2,\beta_2)=([c(v-\sqrt{v^2-4uw})-2du]/2u,\ (-v+\sqrt{v^2-4uw})/2u)$$

其中$u=1+c^2$，$v=2cd-ce+f$，$w=d^2-de+g$．因为c，d,e,f,g都属于$\mathbf{F}$，所以u,v,w也属于$\mathbf{F}$，从而$\mathrm{E}=\mathbf{F}(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)=\mathbf{F}(\sqrt{v^2-4uw})$．由定理6可知，E是有限扩域，且$(\mathrm{E}:\mathbf{F})=2$或1．在第二种情况下，交点的坐标是

$$([-e+\sqrt{e^2-4(d'-fd'+g)}]/2,-d'),([-e-\sqrt{e^2-4(d'-fd'+g)}]/2,-d').$$

从而，$\mathrm{E}=\mathbf{F}(\sqrt{e^2-4(d'-fd'+g)})$．由定理6可知，E是有限扩域，且$(\mathrm{E}:\mathbf{F})=$ 2或1．

施行6)．求两圆的交点相当于解方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+e_1x+f_1y+g_1=0\\ x^2+y^2+e_2x+f_2y+g_2=0.\end{cases}$$

因为两圆相交，所以有$e_1\neq e_2$或$f_1\neq f_2$．从而相当于解方程组

$$\begin{cases}x+[(f_1-f_2)/(e_1-e_2)]y+(g_1-g_2)/(e_1-e_2)=0\\ x^2+y^2+e_2x+f_2y+g_2=0\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}y+(g_1-g_2)/(f_1-f_2)=0\\ x^2+y^2+e_2x+f_2y+g_2=0,\end{cases}$$

这就归结为上面的施行5)的情况，从而成立．

综上所述，定理成立．证完．

定理8　设平面上给定了若干初等几何图形．在平面上建立某一笛卡尔直角坐标系，将这些给定图形在该笛卡尔直角坐标系中的坐标添加到有理数域$\mathbf{Q}$，得数域$\mathbf{F}$．若满足某些条件的一个图形可以用直尺圆规作出，则该图形作出后，它在该笛卡尔直角坐标系中的任意坐标α添加于$\mathbf{F}$所得的单扩域$\mathbf{F}(\alpha)$是$\mathbf{F}$的有限扩域，且$(\mathbf{F}(\alpha):\mathbf{F})=2^s$，其中$s$为一非负整数．

证明　按照定义10，所要的图形可以通过有限步实行1)—6)而得出，设一共进行了k步，α为所得图形的任一坐标．把第i步所得的图形称为第i个图形，$i=1,2,\cdots,k$．$\mathbf{F}_i$表示把前i个所得图形的坐标都添加于$\mathbf{F}$所得的扩域．从而，$\mathbf{F}_{i+1}(i=1,2,\cdots,k-1)$就是把第$i+1$个图形的坐标添加于$\mathbf{F}_i$所得的扩域．由定理7，$(\mathbf{F}_{i+1}:\mathbf{F}_i)=2^{m_{i+1}}$，$m_{i+1}=0$或1，$i=1,2,\cdots,k-1$，$(\mathbf{F}_1:\mathbf{F})=2^{m_1}$，$m_1=0$或1．从而，由定理3得

$$(\mathbf{F}_k:\mathbf{F})=(\mathbf{F}_k:\mathbf{F}_{k-1})(\mathbf{F}_{k-1}:\mathbf{F}_{k-2})\cdots(\mathbf{F}_1:\mathbf{F})=2^m,$$

其中m为非负整数．但是，$\mathbf{F}(\alpha)$是$\mathbf{F}_k$的子域，又是$\mathbf{F}$的扩域，所以，由定理4得，$(\mathbf{F}(\alpha):\mathbf{F})=2^s$，$s$为非负整数．证完．

定理8给出的是可以用直尺圆规作图的必要条件，因此，用这个定理就可以判定关于一些图形不可能用直尺圆规作出的问题．下面是这个定理的一个应用，证明所谓

初等几何三大问题是不能用直尺圆规作出的．该问题是一个古老的问题，曾经吸引了许多数学家，而在扩域的理论建立之前，长时间未得解决．

实际上，定理8的条件也是充分的，从略．

定义13　所谓初等几何三大问题，是指：1)三等分角：任意角都可以三等分；2)立方倍积：给定一个立方体，求作另一个立方体，使它的体积是前者的二倍；3)化圆为方：给定一个圆，求作一个正方形，使它的面积等于圆的面积．

定理9　初等几何三大问题都是不能用直尺圆规作出的．

证明　1)设可以用直尺圆规三等分任意角，则必可以用直尺圆规三等分$60°$角如图1所示，$\angle AOB=60°$，在OB上取点D，以O为原点，以OB为x轴，以OD为单位长，建立笛卡尔直角坐标系，则已知图形如下：$O(0,0)$；$D(1,0)$；OB：$y=0$；OA：$x-\sqrt{3}^{-1}y=0$．将它们的坐标添加于有理数域$\mathbf{Q}$，得$\mathbf{F}=\mathbf{Q}(\sqrt{3})$．由定理6知，$(\mathbf{F}:\mathbf{Q})=2$．

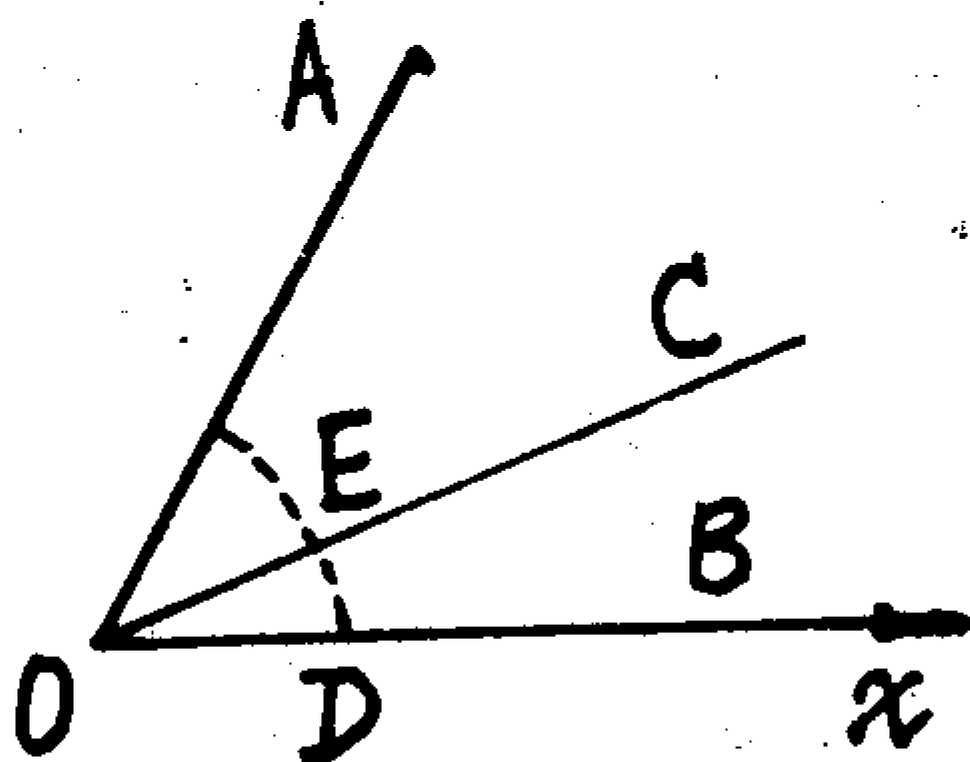

图1

假定用直尺圆规作出了OC，使$\angle COB=20°$．以O为圆心以OD为半径作圆，交OC于E，设E点的横坐标为α，则$\alpha=\cos20°$．由定理8知，$(\mathbf{F}(\alpha):\mathbf{Q})=2^{s+1}$．

由三角公式得，$4\alpha^3-3\alpha=4(\cos20°)^3-3\cos20°=\cos60°=1/2$，所以，$\alpha$是$\mathbf{Q}[x]$中的多项式$8x^3-6x-1$的一个根，容易证明该多项式在$\mathbf{Q}[x]$中不可约，从而由定理5与定理6得$(\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q})=3$．

但是，由定理4得，$(\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q})\mid(\mathbf{F}(\alpha):\mathbf{Q})$，即$3\mid2^{s+1}$，引出矛盾．这就证明了，直尺圆规三等分任意角是不可能的．

2)实际上，问题可以归结为：给定了一条线段AB(即给定了两点A，B)，求作一线段，使该线段等于$\sqrt[3]{2}AB$．

假定用直尺圆规作出了$AE=\sqrt[3]{2}AB$．以A为原点，以AB为x轴，以AB的长为单位长，建立笛卡尔直角坐标系，则已知图形如下：$A(0,0)$；$B(1,0)$．将它们的坐标添加于$\mathbf{Q}$得$\mathbf{F}$，则$\mathbf{F}=\mathbf{Q}$．而点$E(\sqrt[3]{2},0)$．如图2．

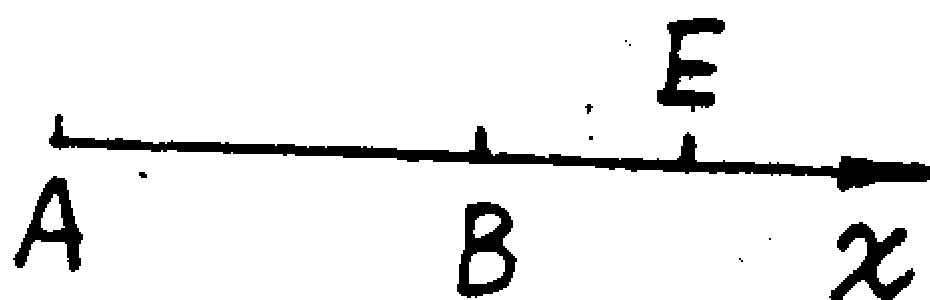

图2

因为，$\sqrt[3]{2}$是$\mathbf{Q}[x]$中的不可约多项式x^3-2的一个根，所以，由定理5与定理

6得，$(\mathbf{F}(\sqrt[3]{2}):\mathbf{F})=(\mathbf{F}(\sqrt[3]{2}):\mathbf{Q})=3$，但是，由定理8得$(\mathbf{F}(\sqrt[3]{2}):\mathbf{F})=(\mathbf{F}(\sqrt[3]{2}):\mathbf{Q})=2^s$，$s$为一非负整数，从而引出矛盾．这就证明了，立方倍积问题用直尺圆规作出是不可能的．

3)如图3所示，已知圆O，以O为原点，过O作直线OC为x轴，且设C在圆O上，以圆O的半径为单位长，建立笛卡尔直角坐标系，则已知图形如下：O(0,0)；C(1,0)；圆O：$x^2+y^2-1=0$．将它们的坐标添加于$\mathbf{Q}$得$\mathbf{F}$，$\mathbf{F}=\mathbf{Q}$．

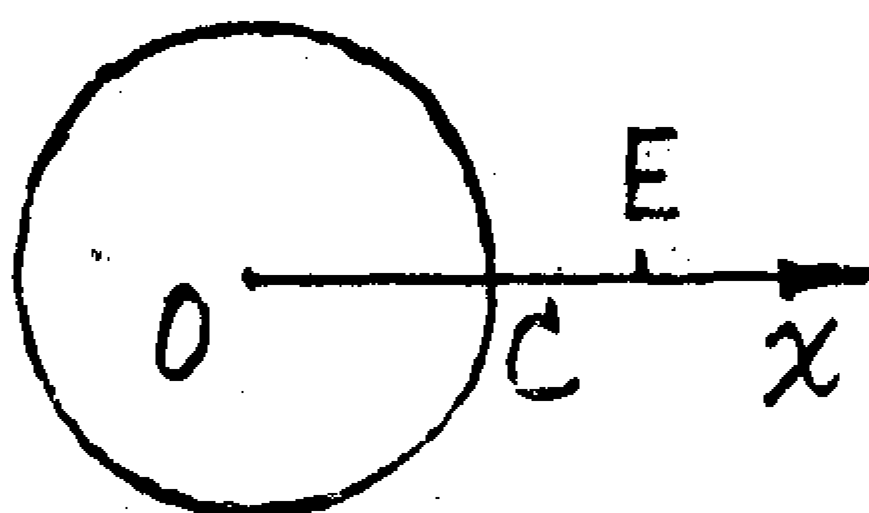

图3

假定用直尺圆规作出了等于圆O面积的正方形，且不妨设OE为该正方形的一边，则E点的横坐标$a=\sqrt{\pi}$．由定理8知，$(\mathbf{F}(a):\mathbf{F})=(\mathbf{Q}(a):\mathbf{Q})=2^s$，$s$是一非负整数．熟知，$\pi$是无理数，所以$a\notin\mathbf{Q}$，从而，$s\geqslant1$．于是，$1,\ \pi=a^2,\ \pi^2,\cdots,\pi^{2^s}$均属于$\mathbf{Q}(a)$，且在$\mathbf{Q}$上线性相关，所以，有一组不全为零的有理数$a_0,a_1,\cdots,a_{2^s}$，使$a_0+a_1\pi+a_2\pi^2+\cdots+a_{2^s}\pi^{2^s}=0$，从而，$\pi$是一个代数数．但是，熟知，$\pi$是一个超越数，引出矛盾，这就证明了，化圆为方问题用直尺圆规作出是不可能的．

综上所述，定理成立．证完．

研究一个具体例子．

例3　设直线上给定两点A与B，则不可能用直尺圆规在AB间作一点C，在CB间作一点D，使　AC/CD＝CD/DB＝DB/AB．

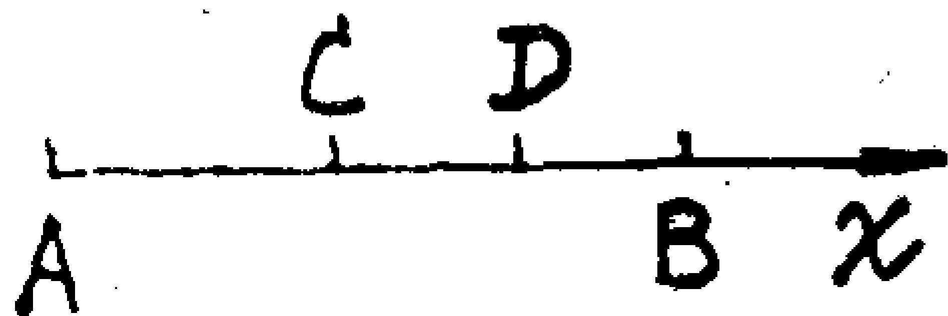

图4

证明　用反证法．假定可以用直尺圆规作出，则如图4所示，以A为原点，以AB为x轴，以AB之长为单位长，建立笛卡尔直角坐标系，已知图形如下：A(0，0)；B(1,0)．将它们的坐标添加于$\mathbf{Q}$得$\mathbf{F}$，$\mathbf{F}=\mathbf{Q}$．

设D点坐标为$(a,0)$，则DB之长为$1-a$．由AC/CD＝CD/DB得，$CD^2=AC\cdot DB$；由CD/DB＝DB/AB得，$DB^2=CD\cdot AB$；从而，$CD=DB^2$，$AC=DB^3$．由$DB=1-a$得，$CD=(1-a)^2$，$AC=(1-a)^3$，又$AC=AB-CD-DB=1-(1-a)^2-(1-a)$，所以$(1-a)^3=1-(1-a)^2-(1-a)$，即$a^3-4a^2+6a-2=0$，$a$是$\mathbf{Q}[x]$中多项式$x^3-4x^2+6x-2$的一个根，容易证明该多项式在$\mathbf{Q}[x]$中不可约，从而，$(\mathbf{Q}(a):\mathbf{Q})=3$，但是，$(\mathbf{F}(a):\mathbf{F})=(\mathbf{Q}(a):\mathbf{Q})=2^s$，引出矛盾．因此，不能用直尺圆规作出．

参考文献

〔1〕熊全淹，近世代数，上海科学技术出版社，1978．

〔2〕张禾瑞与郝炳新，高等代数，人民教育出版社，1960．

（孙宗明）

附录二 关于分母有理化问题

熟知，经过简单的变形，可以将分母中的根号去掉，如

$$\sqrt{3}/(2-\sqrt{3})=\sqrt{3}(2+\sqrt{3})/(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=3+2\sqrt{3};$$

$$1/(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)=1/((\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1)$$

$$=(\sqrt[3]{2}-1)/(\sqrt[3]{2}-1)((\sqrt[2]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1)=\sqrt[3]{2}-1,$$

这一工作称为分母有理化.

下面，我们将这一问题一般化，回答解决的可能性问题，并给出解答的一般程序．这一问题的一般提法如下：

Q表示有理数域，$a\in\mathbf{Q}$，m是一个正整数，$\sqrt[m]{a}\notin\mathbf{Q}$，对于式子 $g(\sqrt[m]{a})/f(\sqrt[m]{a})$，$f(\sqrt[m]{a})$，$g(\sqrt[m]{a})$是关于$\sqrt[m]{a}$的有理系数的多项式，且$f(\sqrt[m]{a})$确实含有根号，能否将分母中的根号去掉？按照什么步骤去掉根号？回答是肯定的：能够将分母中的根号去掉．

由于$\sqrt[m]{a}$适合**Q**〔x〕中的多项式x^m-a，所以$\sqrt[m]{a}$是**Q**上的代数元素，从而存在$\sqrt[m]{a}$的极小多项式$p(x)\in\mathbf{Q}$〔x〕．设$p(x)$是n次的，则$\sqrt[m]{a}$是**Q**上的n次代数元素．为简单，记$\alpha=\sqrt[m]{a}$，则由代数单扩域的知识得，

$\mathbf{Q}(\alpha)=\mathbf{Q}[\alpha]_{n-1}=\{b_0+b_1\alpha+\cdots+b_{n-1}\alpha^{n-1}|b_i\in\mathbf{Q}\}$，从而，$g(\sqrt[m]{a})/f(\sqrt[m]{a})$可以写为$\sqrt[m]{a}$的"$n$-1次"有理系数多项式，因此，可以将分母中的根号去掉．

为了给出分母有理化的一般程序，先作些准备．

命题1 设$a\in\mathbf{Q}$，m为正整数，$\sqrt[m]{a}\notin\mathbf{Q}$，则有正整数$n>1$，$N>1$，有$b\in\mathbf{Q}$，使$\sqrt[m]{a}=b\sqrt[n]{N}$或$b\sqrt[n]{N}i$，且N满足条件：$N=p_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_t^{l_t}$为标准分解式，$l_j<n$，$j=1,2,\cdots,t$，$(l_1,l_2,\cdots,l_t,n)=1$．

证明 按照熟知的根式化简的步骤，即可得到，从略．证完．

由命题1知，前面所提出的问题转化为：将$g(\beta)/f(\beta)$的分母中的根号去掉，其中$\beta=\sqrt[n]{N}$或$\sqrt[n]{N}i$．下面还将看到，$\sqrt[n]{N}i$的情况转化为$\sqrt[n]{N}$的情况．

由代数单扩域的知识可知，解答问题的关键步骤，首先是找出β所适合的**Q**〔x〕中的不可约多项式．为此，引入

定义 设n，M为正整数，$\gamma=\sqrt[n]{M}\notin\mathbf{Q}$，使$\gamma^k\in\mathbf{Q}$的最小正整数$k$，称为无理数$\gamma$对于**Q**的次数．

例1 $\sqrt[4]{4}$对于Q的次数为2.

我们将证明$\beta=\sqrt[n]{\mathrm{N}}$对于Q的次数为$n$.

命题2 设n, N为正整数，则$\sqrt[n]{\mathrm{N}}$为整数或无理数.

证明 从略. 证完.

命题3 设n为正整数，p_1, p_2, …, p_t为互异素数，l_j为正整数，且$l_j<n$, $j=1,2,\cdots,t$, 则$\sqrt[n]{p_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_t^{l_t}}$为无理数.

证明 由命题2，并用反证法，易证得. 证完.

命题4 设n, N为正整数，$\mathrm{N}=p_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_t^{l_t}$为N的标准分解式，$l_j<n$, $j=1,2,\cdots,t$, 并且$(l_1, l_2, \cdots, l_t, n)=1$; 则$\beta=\sqrt[n]{\mathrm{N}}$对Q的次数为$n$.

证明 设$\beta=\sqrt[n]{\mathrm{N}}$对于Q的次数为$k$, 则容易证明$k\mid n$, 从略. 下面证明$n\mid k$. 由$(l_1,l_2,\cdots,l_t,n)=1$知，存在整数$u_1,u_2,\cdots,u_t$及$v$, 使$u_1l_1+u_2l_2+\cdots+u_tl_t+vn=1$, 从而$u_1kl_1+u_2kl_2+\cdots+u_tkl_t+vkn=k$. 另外，由$\beta\in\mathbf{Q}$容易证$\beta^k=p_1^{kl_1/n}p_2^{kl_2/n}\cdots p_t^{kl_t/n}$=整数，再由$p_1$, p_2,…, p_t互异知，$n\mid kl_j$, $j=1,2,\cdots,t$. 否则，由命题3可证β^k为无理数，导致矛盾. 于是，$n\mid(u_1kl_1)+u_2kl_2+\cdots+u_tkl_t+vkn)$, $n\mid k$. 因此，$k=n$, 即，$\beta=\sqrt[n]{\mathrm{N}}$对于Q的次数为$n$. 证完.

定理1 命题4中的$\beta=\sqrt[n]{\mathrm{N}}$所适合的Q〔$x$〕中的不可约多项式之一是$x^n-\mathrm{N}$.

证明 设ε为n次本原单位根，则$x^n-\mathrm{N}$在C〔x〕中分解为$(x^n-\mathrm{N})=(x-\sqrt[n]{\mathrm{N}})(x-\sqrt[n]{\mathrm{N}}\varepsilon)\cdots(x-\sqrt[n]{\mathrm{N}}\varepsilon^{n-1})$. 设$x^n-\mathrm{N}$在Q〔$x$〕中可约，则$x^n-\mathrm{N}=h_1(x)h_2(x)$, 其中$h_1(x)$, $h_2(x)\in\mathbf{Q}$〔x〕，且$1\leqslant deg(h_1(x))$, $deg(h_2(x)\leqslant n$. 由因式分解定理得，$h_1(x)$, $h_2(x)$在C〔x〕中均写为一些$x-\sqrt[n]{\mathrm{N}}\varepsilon^i$因式的乘积，从而，其常数项就应为$(\sqrt[n]{\mathrm{N}})^w\varepsilon^t$, $w<n$. 由命题4，$(\sqrt[n]{\mathrm{N}})^w$是无理数，又ε^t等于1或某一非实的复数，所以，$(\sqrt[n]{\mathrm{N}})^w\varepsilon^t\notin\mathbf{Q}$, 引出矛盾. 因此，$x^n-\mathrm{N}$在Q〔$x$〕中不可约. 证完.

下面给出分母有理化的一般程序.

定理2 对于$g(\beta)/f(\beta)$, $\beta=\sqrt[n]{\mathrm{N}}$或$\sqrt[n]{\mathrm{N}}i$, $\sqrt[n]{\mathrm{N}}$如定理1中所述，按下列程序进行分母有理化：

1）当$\beta=\sqrt[n]{\mathrm{N}}$时，

第一步，求出$u(x)$, $v(x)\in\mathbf{Q}$〔x〕，使$f(x)u(x)+(x^n-N)v(x)=d$, $d\in\mathbf{Q}$, 从而$f(\beta)u(\beta)=d$, 称$u(\beta)$为有理化因式；

第二步，进行变形

$g(\beta)/f(\beta)=g(\beta)u(\beta)/f(\beta)u(\beta)=d^{-1}g(\beta)u(\beta)$

2）当$\beta=\sqrt[n]{N}i$时，

第一步，写$f(\beta)=f_1(\sqrt[n]{N})+f_2(\sqrt[n]{N})i$，并进行变形

$$g(\beta)/f(\beta)=g(\beta)/(f_1(\sqrt[n]{N})+f_2(\sqrt[n]{N})i)$$

$$=\frac{g(\beta)(f_1(\sqrt[n]{N})-f_2(\sqrt[n]{N})i)}{(f_1(\sqrt[n]{N})+f_2(\sqrt[n]{N})i)\cdot(f_1(\sqrt[n]{N})-f_2(\sqrt[n]{N})i)}$$

$$=g(\beta)(f_1(\sqrt[n]{N})-f_2(\sqrt[n]{N})i)/((f_1(\sqrt[n]{N}))^2+(f_2(\sqrt[n]{N}))^2),$$

从而化为1)的情况；

第二步，按1)的步骤去掉分母中的根号。

证明 1)由定理1及多项式的知识可知，x^n-N是β在$Q[x]$中的极小多项式，从而再由关于单扩域的定理即得证。

2)易知，第一步将问题转化为1)的情况，分母中已去掉i，自然就可以按1)去掉分母中的根号了．证完．

下面研究一个例子．

例2 对于$(\sqrt[5]{4}+3)/(\sqrt[5]{8}-3\sqrt[5]{2}+1)$，作分母有理化．

解 $\beta=\sqrt[5]{2}$，β的极小多项式是x^5-2，$\sqrt[5]{8}-3\sqrt[5]{2}+1=(\sqrt[5]{2})^3-3\sqrt[5]{2}+1$，于是，对于$x^5-2$与$x^3-3x+1$，在$Q[x]$中作辗转相除法求得

$$x^5-2=(x^3-3x+1)(x^2+3)+(-x^2+9x-5)$$

$$x^3-3x+1=(-x^2+9x-5)(-x-9)+(73x-44),$$

$$-x^2+9x-5=(73x-44)(-73^{-1}x+613/5329)+327/5329$$

从而得到
$$(x^3-3x+1)(-73x^4-44x^3-31x^2-59x-49)$$
$$+(x^5-2)(73x^2+44x-188)=327.$$

所以
$$\frac{\sqrt[5]{4}+3}{\sqrt[5]{8}-3\sqrt[5]{2}+1}=$$

$$\frac{(\sqrt[5]{4}+3)(-73\sqrt[5]{16}-44\sqrt[5]{8}-31\sqrt[5]{4}-59\sqrt[5]{2}-49)}{(\sqrt[5]{8}-3\sqrt[5]{2}+1)(-73\sqrt[5]{16}-44\sqrt[5]{8}-31\sqrt[5]{4}-59\sqrt[5]{2}-49)}$$

$$=327^{-1}(-250\sqrt[5]{16}-191\sqrt[5]{8}-142\sqrt[5]{4}-323\sqrt[5]{2}-235).$$

参 考 文 献

〔1〕熊全淹，近世代数，上海科学技术出版社，1978．

〔2〕北京大学数学力学系代数与几何教研室代数小组，高等代数，高等教育出版社，1978．

（孙宗明）

附录三　代数方程的根式解问题

代数方程的根式解问题，促进了抽象代数学的产生及发展．为了解答这一问题，伽罗华引进群的概念，并且，把域与子域的关系转化为群与子群的关系，完成了著名的伽罗华理论．本文将简要地介绍数域上的伽罗华理论．首先，作为准备，介绍置换群的有关知识，建立可解群的概念，研究多项式的分裂域的理论；而后，建立伽罗华基本定理；最后，讨论多项式的伽罗华群，给出代数方程可以根式解的条件．

一　置换群

定义 1　n个元素的集合A的一个一一变换σ(即A到A的双射)称为集合A的一个置换．A的元素常称为文字，σ称为n个文字的置换，简称为n元置换，n个文字常以 1，2，…，n表示．记为 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix}$．

定义 2　若n元置换σ使$\sigma(i_1)=i_2,\sigma(i_2)=i_3,\cdots,\sigma(i_{k-1})=i_k$，$\sigma(i_k)=i_1$，而使其余文字不变(即文字自身变到自身)，则称$\sigma$是一个$k$-循环置换．2-循环置换称为对换．1-循环置换使$n$个文字全不变．$k$-循环置换$\sigma$记为$\sigma=(i_1i_2\cdots i_k)$，称$i_1$，$i_2$，…，$i_k$为其所含的文字．若两个循环置换不含有公共文字，则称这两个循环置换是不相连的．

结论 1　若$\sigma=(i_1i_2\cdots i_k)$，则$\sigma=(a\sigma(a)\cdots\sigma^{k-1}(a))$，$\sigma=(i_1i_2\cdots i_k)$
$=(i_2i_3\cdots i_ki_1)=\cdots=(i_ki_1i_2\cdots i_{k-1})$．

证明　由定义 2 即得．证完．

结论 2　若 $\sigma_1=\begin{pmatrix}j_1 & \cdots j_k & j_{k+1}\cdots j_n\\ j_1^{(1)} & \cdots j_k^{(1)} & j_{k+1}\cdots j_n\end{pmatrix}$，$\sigma_2=\begin{pmatrix}j_1\cdots j_k & j_{k+1} & \cdots j_n\\ j_1\cdots j_k & j_{k+1}^{(1)} & \cdots j_n^{(1)}\end{pmatrix}$，

则　$\sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1=\begin{pmatrix}j_1 & \cdots j_k & j_{k+1} & \cdots j_n\\ j_1^{(1)} & \cdots j_k^{(1)} & j_{k+1}^{(1)} & \cdots j_n^{(1)}\end{pmatrix}$，从而，两个不相连的循环置换可交换．

证明　容易验证，从略．证完．

结论 3　设σ是一个n元置换，a为任一个文字，$\sigma^t(a)$是序列$a,\sigma(a),\sigma^2(a)$，…中第一个与前面的文字发生重复的文字，则$\sigma^t(a)=a$．

证明　用反证法，若不然，设$\sigma^t(a)\neq a$，则有$\sigma^t(a)=\sigma^i(a)$，$i\geqslant 1$，两边用σ的逆σ^{-1}作用，得到$\sigma^{t-1}(a)=\sigma^{i-1}(a)$，从而，第一个与前面的文字发生重复的

文字不是$\sigma^t(a)$，引出矛盾．因此，$\sigma^t(a)=a$．证完．

定理 1 每个n元置换σ都可以分解为不相连的循环置换的乘积，n个文字中的每个文字都出现于一个循环置换中；而且，不计因子次序时，分解式是唯一的，即，若$\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_w=\sigma_1'\sigma_2'\cdots\sigma_u'$是$\sigma$的两个分解式，则必有$w=u$，且适当交换因子的次序之后，有$\sigma_k=\sigma_k'$，$k=1,2,\cdots,w$．

证明 参见〔1〕，此处从略．证完．

定理 1 的证明同时给出了分解式的求法．

例 1 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&3&4&2&6&5&7\end{pmatrix}=(1)(2\ 3\ 4)(5\ 6)(7)$．

结论 4 任一n元置换σ均可以写为对换之积．

证明 由定理 1，σ可以写为循环置换之积，而$(i_1i_2\cdots i_k)=(i_1i_k)(i_1i_{k-1})\cdot(i_1i_2)$，所以得证．证完．

定义 3 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是n个文字，$D(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod\limits_{i<j}(x_i-x_j)=(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)$，$\sigma$是一个$n$元置换，$\sigma(D(x_1,x_2,\cdots,x_n))=D(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\cdots,x_{\sigma(n)})=\prod\limits_{i<j}(x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(j)})$．若$\sigma(D)=D$，则称$\sigma$为偶置换；若$\sigma(D)=-D$，则称$\sigma$为奇置换．

定理 2 设$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\\sigma(1)&\sigma(2)&\cdots&\sigma(n)\end{pmatrix}$是任一个$n$元置换，则下列三条件等价：1）$\sigma$是奇(偶)置换；2）排列$\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$是奇(偶)排列；3）$\sigma$可以写为奇数(偶数)个对换之积．

证明 用循环证法．

1）⇒2）．因为，$\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$中的每个反序使$\sigma(D)$出现一个且仅出现一个负号，所以，由 1)即得 2)成立．

2）⇒3）．对于排列$\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$的任一个反序，例如$\sigma(1)$与$\sigma(2)$构成反序，相应地作对换$(\sigma(1),\sigma(2))$，直接相乘，有$\sigma(12)=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\\sigma(2)&\sigma(1)&\sigma(3)&\cdots&\sigma(n)\end{pmatrix}$．设排列$\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$的反序数为$k$，则有对换$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k$，使得$\sigma\delta_1\delta_2\cdots\delta_k=\begin{pmatrix}1&2\cdots n\\1&2\cdots n\end{pmatrix}$，从而，$\sigma=\delta_k\delta_{k-1}\cdots\delta_2\delta_1$，3）成立．

3）⇒1）．由 3），设σ写为t个对换之积，则$\sigma(D)$中出现t个负号，因为每个对换使一个且仅使一个因子中的两文字交换．从而，1）成立．证完．

由定理 2 推出，对于任一个n元置换σ，尽管写为对换乘积的方式不是唯一确定的，

但是，乘积中所含对换的个数的奇偶性是唯一确定的.

例2 $\sigma=(1)(2\ 3\ 4)(5\ 6)(7)=(2\ 4)(2\ 3)(5\ 6)$

$=(1\ 2)(2\ 3)(3\ 2)(2\ 1)(2\ 4)(2\ 3)(5\ 6)$.

结论5 所有n元置换的集合记为S_n. S_n中的奇偶置换各占一半($n\geqslant 2$). S_n对于映射的乘法作成群. S_n中所有偶置换的集合A_n作成S_n的子群.

证明 易证，从略. 证完.

定义4 群S_n称为n次对称群，S_n的子群A_n称为n次交代群.

结论6 设S是群G的非空子集，$\langle S\rangle=\{a_1^{\varepsilon_1}a_2^{\varepsilon_2}\cdots a_k^{\varepsilon_k}\mid k$为任意正整数,$a_i\in S$, $\varepsilon_i=1$或-1, $i=1,2,\cdots,k\}$，则$\langle S\rangle$作成G的子群.

证明 易证，从略. 证完.

定义5 $\langle S\rangle$称为由S生成的G的子群. 当$S=\{c_1,c_2,\cdots,c_t\}$时，记

$$\langle S\rangle=\langle c_1, c_2,\cdots,c_t\rangle.$$

定理3 1) $S_n=\langle(1\ 2),(1\ 3),\cdots,(1n)\rangle$;

2) $A_n=\langle(1\ 2\ 3),(1\ 2\ 4),\cdots,(12n)\rangle$.

证明 1) 由$(ij)=(1i)(1j)(1i)$即得证.

2) 由$(1ij)=(1j)(1i)$与$(1ij)=(12j)^2(12i)(12j)$即得证. 证完.

关于S_n，A_n的正规子群，有下面的

定理4 1) A_1的正规子群是A_1; A_2的正规子群是A_2; A_3的正规子群是$\{e\}$, A_3; A_4的正规子群是$\{e\}$, $B_4=\{(1),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}$, A_4; $n\geqslant 5$, A_n的正规子群是$\{e\}$, A_n.

2) S_1的正规子群是S_1; S_2的正规子群是$\{e\}$, S_2; S_3的正规子群是$\{e\}$, A_3, S_3; S_4的正规子群是$\{e\}$, B_4, A_4, S_4; $n\geqslant 5$时，S_n的正规子群是$\{e\}$, A_n, S_n.

证明 1) 对于A_1, A_2, A_3, A_4，直接验证即得. $n\geqslant 5$时，A_n的正规子群是$\{e\}$, A_n，这是著名的结果，容易从其它地方找到证明，从略.

2) 对于S_1, S_2, S_3, S_4，直接验证即得. $n\geqslant 5$时，设H是S_n的正规子群，且$H\neq\{e\}$，$H\neq S_n$，则易知$H\cap A_n$是S_n的正规子群. 由于$H\cap A_n\subseteq A_n$，所以易知$H\cap A_n$是A_n的正规子群，从而，再由1)得，$H\cap A_n=A_n$或$H\cap A_n=\{e\}$. 若$H\cap A_n=\{e\}$，则由$H\neq\{e\}$知：若H中含有奇置换，则H中除e外必全为奇置换，且对于任一奇置换σ，有$\sigma^2=e$，从而，σ表示为不相连的循环置换的乘积时，必为对换之积，否

则$\sigma^2 \neq e$．设τ为H中的另一奇置换，则$\sigma\tau = e$，$\sigma = \tau^{-1} = \tau$，即H中任意两个奇置换均相等．设$\sigma = (ij)\cdots$，取$\tau = (ik)$，$k \neq j$，则直接计算得$\tau^{-1}\sigma\tau = (kj)\cdots$，由于H是$S_n$的正规子群，所以$\tau^{-1}\sigma\tau$是H中的奇置换，但$\sigma \neq \tau^{-1}\sigma\tau$，引出矛盾．因此，必须有$H \cap A_n = A_n$，$A_n \subseteq H$．再由$|A_n| = \frac{1}{2}|S_n|$及$|H| \,\big|\, |S|$知，$|H| = |A_n|$，$H = A_n$．因此，$S_n$的正规子群是$\{e\}$，$A_n$，$S_n$．证完．

二　可解群

结论7　设H是群G的子群，M_L是H的一切左陪集作成的集合，M_R是H的一切右陪集作成的集合，则存在M_L到M_R的双射．

证明　作$f: M_L \to M_R$，对任意$aH \in M_L$，使$f(aH) = Ha^{-1}$，则易证f是M_L到M_R的一个双射．证完．

定义6　设H是群G的子群．若H的左（右）陪集的个数是有限数n，则称n是H在G中的指数，记为$n = [G:H]$．

结论8　若H是群G的正规子群，$[G:H] = n$，则商群G/H的阶是n，即$|G/H| = [G:H] = n$．

证明　由商群的定义及定义6即得．证完．

定义7　设G是群．若存在G的子群$G_1 = G, G_2, \cdots, G_s, G_{s+1} = \{e\}$，使得：1）$G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_s \supseteq G_{s+1}$；2）每个$G_{i+1}$是$G_i$的正规子群，$i = 1, 2, \cdots, s$；3）商群列$G_1/G_2$，$G_2/G_3, \cdots, G_s/G_{s+1}$中的任一个的阶都是某个素数或1，则称G是一个可解群．

定理5　当$1 \leqslant n \leqslant 4$时，$S_n$是可解群；当$n \geqslant 5$时，$S_n$不是可解群．

证明　当$n \neq 4$时，根据定理4与定义7，容易验证，从略．当$n = 4$时，$C_4 = \{(1), (12)(34)\}$是B_4的正规子群，从而就有$S_4 \supset A_4 \supset B_4 \supset C_4 \supset \{e\}$且$|S_4/A_4| = 2$，$|A_4/B_4| = 3$，$|B_4/C_4| = 2$，$|C_4/\{e\}| = 2$，所以，$S_4$是可解群．证完．

三　多项式的分裂域

定义8　设E是域F的扩域．若E的任意元素都是F的代数元，则称E是F的代数扩域．

注　以下的域均为数域，有时不再写出"数"这个字．自然，许多结论对于一般的域也是成立的．

定理6　数域F的扩域E是F的代数单扩域$\Leftrightarrow$E是F的有限代数扩域．

证明　$\Rightarrow$．设$E = F(\alpha)$，α在F上的次数是n，则由代数单扩域的结构定理，$(F(\alpha):F) = n$．从而，对于任意的$\beta \in E$，$1, \beta, \beta^2, \cdots, \beta^n$在F上线性相关，于是，有不全为零的$b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n$，使得$b_0 + b_1\beta + b_2\beta^2 + \cdots + b_n\beta^n = 0$，所以，$\beta$是

F上的代数元．因此，E是F的有限代数扩域．

$\Leftarrow$．由于E是F的有限扩域，所以$E=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，例如，取$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是E在F上的一组基，即可以，我们先证明$n=2$的情况，为方便，写$E=F(\beta,\gamma)$．

设β，γ分别为F〔x〕中不可约多项式$f(x)$，$g(x)$的根．又设$\beta_1=\beta$，$\beta_2,\cdots,\beta_s$是$f(x)$的所有根，$\gamma_1=\gamma,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$是$g(x)$的所有根．对于任意的$i$及$j\neq 1$，$\beta_i+x\gamma_j=\beta+x\gamma$在F中至多有一个根．由于F中有无穷多个数，所以，有$a\in F$，使$\beta_i+a\gamma_j\neq\beta+a\gamma$．设$\alpha=\beta+a\gamma$，则有$F(\beta,\gamma)=F(\alpha)$．首先，显然$F(\alpha)\subseteq F(\beta,\gamma)$，其次，再证$F(\beta,\gamma)\subseteq F(\alpha)$．实际上，只要证明了，$\gamma\in F(\alpha)$，就有$\beta=\alpha-a\gamma\in F(\alpha)$，从而得证．

我们证明，$x=\gamma$是$F(\alpha)$〔x〕中$g(x)$与$f(\alpha-ax)$的唯一的公根．由于$g(\gamma)=0$及$f(\alpha-a\gamma)=f(\beta)=0$，所以$\gamma$是公根．当$j\neq 1$时，$\gamma_j$不是$f(\alpha-ax)$的根，否则，由$f(\alpha-a\gamma_j)=0$知，$\alpha-a\gamma_j$是$f(x)$的根．从而$\alpha-a\gamma_j=\beta_i$，$\beta_i+a\gamma_j=\alpha$，与$\beta_i+a\gamma_j\neq\beta+a\gamma(j\neq 1)$矛盾．这样，$g(x)$与$f(\alpha-ax)$仅有一次公因式．即$x-\gamma$是$g(x)$，$f(\alpha-ax)$的最大公因式，由于最大公因式不因数域的扩大而改变，所以$x-\gamma\in F(\alpha)$〔x〕，$\gamma\in F(\alpha)$．

当$n>2$时，用数学归纳法，即得．证完．

例3　$\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$．易证，从略．

结论9　（代数基本定理）任意复系数多项式必有复数根．

结论10　系数为数的n次多项式$f(x)$在复数域$\mathbf{C}$中有且仅有n个根（重根按重数计算），从而$f(x)$在$\mathbf{C}$〔x〕中分解为一次因式的乘积．

证明　此为代数基本定理的推论．证完．

定义9　设$f(x)$是域F上的n次多项式，E是F的扩域．若$f(x)$在E〔x〕中可以分解为一次因式的乘积，$f(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$，但是，在E的任一个真子域的多项式环中都不能如此分解，则称E是$f(x)$的分裂域．

定理7　对于F〔x〕中的任意多项式$f(x)$，F为数域，$\deg(f(x))=n\geqslant 1$，存在唯一的分裂域E，且E是F的有限代数扩域．

证明　1)由结论9，$f(x)$在$\mathbf{C}$中有n个根$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$．作$E=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则E就是$f(x)$的分裂域．唯一性显然．

2)$E=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$均为F上的代数元，且次数均不大于$n$．从而，由扩域的次数定理得$(E:F)\leqslant n^n$．因此，E是F的有限扩域，进而可证E是F的代数扩域．证完．

例4　$f(x)=x^2-2\in\mathbf{Q}$〔x〕的分裂域$E=\mathbf{Q}(\sqrt{2})$．

定理8　若F，$\bar{F}$是域，$F\overset{\sigma}{\simeq}\bar{F}$，$g(x)$是F〔$x$〕中的不可约多项式，$\bar{g}(x)$是

$\overline{F}[x]$中与$g(x)$对应的多项式（即系数分别是$g(x)$的系数的象），α是$g(x)$在F的扩域中的一个根，$\overline{\alpha}$是$\overline{g}(x)$在$\overline{F}$的扩域中的一个根，则有F(α)，$\overline{F}(\overline{\alpha})$的同构$\tau$，使得对于任意$a\in F$，有$\tau(a)=\sigma(a)$，且$\tau(\alpha)=\overline{\alpha}$．特别地，当$F=\overline{F}$，$\sigma$是恒等映射，$\alpha$，$\beta$是$g(x)$的两个根，有$F(\alpha)\overset{\tau}{\simeq}F(\beta)$，$\tau(\alpha)=\beta$，且对于任意$a\in F$，有$\tau(a)=a$；而对于$f(x)\in F[x]$的分裂域E的自同构$\tau$，若$\tau$保持F的元素不动，则$\tau$把$f(x)$的根变为$f(x)$的根．

证明 1）$\overline{g}(x)$是$\overline{F}[x]$中的不可约多项式．若不然，设$\overline{g}(x)$可约，则$\overline{g}(x)=\overline{g}_1(x)\overline{g}_2(x)$．假定$g_1(x)$，$g_2(x)$是F[x]中分别与$\overline{g}_1(x)$，$\overline{g}_2(x)$对应的多项式．因为$F\overset{\sigma}{\simeq}\overline{F}$，所以$g(x)=g_1(x)g_2(x)$，与$g(x)$是不可约多项式矛盾．

2）根据代数单扩域的结构定理，$F(\alpha)=\{\sum_{i=0}^{n-1}a_i\alpha^i \mid a_i\in F\}$，$\overline{F}(\overline{\alpha})=\{\sum_{i=0}^{n-1}\overline{a}_i\overline{\alpha}^i \mid \overline{a}_i\in\overline{F}\}$．作$\tau: F(\alpha)\to\overline{F}(\overline{\alpha})$，$\tau(\sum_{i=0}^{n-1}a_i\alpha^i)=\sum_{i=0}^{n-1}\overline{a}_i\overline{\alpha}^i$，易证$F(\alpha)\overset{\tau}{\simeq}\overline{F}(\overline{\alpha})$，且$\tau(\alpha)=\overline{\alpha}$，其中$\overline{a}_i=\sigma(a_i)$，具体细节从略．

3)由1)，2)可得出$F=\overline{F}$的情况．证完．

定义10 设E是F的代数扩域，对于F[x]中的任意的不可约多项式$g(x)$，若$g(x)$在E中有根，则$g(x)$在E[x]中可以分解为一次因式的乘积，那么，E就称为F的正规扩域，又称为F的伽罗华域．

定理9 E是域F的有限正规扩域⟺E是F[x]中的某个多项式$f(x)$的分裂域．

证明 ⟹．由于E是F的有限扩域，所以$E=F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$．设$f_i(x)$是F[x]中以$\alpha_i$为根的不可约多项式，则由E是F的正规扩域知，$f_i(x)$在E[x]中分解为一次因式的乘积，从而$f(x)=\prod_{i=1}^{n}f_i(x)$在E[x]中分解为一次因式的乘积．因此，E是$f(x)$的分裂域．

⟸．设$E=F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是F[x]中的某一个多项式$f(x)$的分裂域，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是$f(x)$的根，则用定理7知，E是F的有限代数扩域．设$g(x)$是F[x]中的任一不可约多项式，$\beta$是$g(x)$的一个根，$\beta\in E$，设$\beta'$是$g(x)$的另一根，则只要证明$\beta'\in E$．

由定理8，存在σ，使$F(\beta) \overset{\sigma}{\simeq} F(\beta')$，且对于任意的$a \in F$，有$\sigma(a)=a$，还有$\sigma(\beta)=\beta'$．把$f(x)$看作$F(\beta)[x]$，$F(\beta')[x]$中的多项式．反复使用定理8，得到$\tau$，使得$F(\beta)(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) \overset{\tau}{\simeq} F(\beta')(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，$\tau(\alpha_i)=\alpha_j$，且对于$F(\beta)$中的任意的$b$，有$\tau(b)=\sigma(b)$．由于E是F的代数扩域，$\beta \in E$，所以，$\beta$是系数属于F的$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的多项式；$\beta=h(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，从而$\beta'=\sigma(\beta)=\tau(\beta)=\tau(h(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n))=h(\tau(\alpha_1), \tau(\alpha_2), \cdots, \tau(\alpha_n)) \in F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，即$\beta' \in E$．证完．

定理10　若数域E是数域F的有限正规扩域，$(E:F)=n$，则E的保持F的元不动的自同构的个数是n．

证明　由定理9，E是F$[x]$中某个多项式的分裂域，从而，由定理6，E又是F的代数单扩域．设$E=F(\alpha)$，α是F$[x]$中的不可约多项式$p(x)$的根．由代数单扩域的结构定理知，$p(x)$是n次多项式．易证，$p(x)$无重根．设$p(x)$的n个根为$\alpha_1=\alpha, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$．由于E是F的正规扩域，所以$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$均在E中，利用定理8，得出，E的保持F的元素不动的自同构，把$p(x)$的根为α变为$p(x)$的根α_j，$j=1, 2, \cdots, n$．因此，这样的自同构的个数是n．证完．

四　伽罗华基本定理

结论11　设E是域，H是E的自同构群的子群，$F(H)=\{f \mid f \in E, \sigma(f)=f, \forall \sigma \in H\}$，则$F(H)$是E的子域．

证明　显然，0，1 $\in F(H)$，从而$F(H)$至少含两个元素．若f_1，f_2是$F(H)$中的任意元素，则对于任意$\sigma \in H$，有$\sigma(f_1)=f_1$，$\sigma(f_2)=f_2$，从而，$\sigma(f_1-f_2)=\sigma(f_1)-\sigma(f_2)=f_1-f_2$，所以，$f_1-f_2 \in F(H)$．当$f_2 \neq 0$时，$\sigma(f_1 f_2^{-1})=\sigma(f_1)\sigma(f_2)^{-1}=f_1 f_2^{-1}$，所以，$f_1 f_2^{-1} \in F(H)$．因此，$F(H)$是E的子域．证完．

定义11　称结论11中的$F(H)$是子群H所决定的E的子域．

结论12　设E是域，F是E的子域，$G(E/F)=\{\sigma \mid \sigma$是E的自同构，且$\sigma(f)=f, \forall f \in F\}$，则$G(E/F)$对于映射的乘法作成一个群．

证明　显然，E的恒等自同构在$G(E/F)$中，从而$G(E/F)$非空．若σ_1，σ_2是$\sigma(E/F)$中的任意元素，则对于任意$f \in F$，有$\sigma_1(f)=f$，$\sigma_2(f)=f$，从而，$(\sigma_1\sigma_2)(f)=\sigma_1(\sigma_2(f))=\sigma_1(f)=f$，$\sigma_1^{-1}(f)=\sigma_1^{-1}(\sigma_1(f))=(\sigma_1^{-1}\sigma_1)(f)=f$，所以，$\sigma_1\sigma_2$，$\sigma_1^{-1} \in G(E/F)$．因此，$G(E/F)$作成E的自同构群的子群，即$G(E/F)$作成群．证完．

定义12　结论12中的群$G(E/F)$称为E对于F的伽罗华群，或称为子域F所决定的子群。

结论13　设E是域F的正规扩域，F_1是F的扩域，且$F\subseteq F_1\subseteq E$，则E是$F_1$的正规扩域。

证明　由于E是F的正规扩域，所以E是F的代数扩域，从而E是F_1的代数扩域．设$g(x)$是$F_1[x]$中的任一个不可约多项式，$\alpha\in E$，$g(\alpha)=0$．由$\alpha\in E$知，α是$F[x]$中某一个不可约多项式$h(x)$的根，即$h(\alpha)=0$，由于E是F的正规扩域，所以$h(x)$在$E[x]$中分解为一次因式的乘积．但是，$h(x)\in F_1[x]$，又，$g(x)$在$F_1[x]$中不可约，从而，根据代数单扩域的理论，由$g(\alpha)=h(\alpha)=0$得，$g(x)\mid h(x)$．因此，$g(x)$在$E[x]$中分解为一次因式的乘积，E是F_1的正规扩域．证完．

定理11　（伽罗华基本定理）若E是域F的有限正规扩域，F_1是中间域，$F\subseteq F_1\subseteq E$，H是$G(E/F)$的子群，则

1）$F(G(E/F_1))=F_1$；　　2）$G(E/F(H))=H$；

3）$|G(E/F_1)|=(E:F_1)$，$|G(E/F)|=(E:F)$，

$$[G(E/F):G(E/F_1)]=(F_1:F)\ .$$

证明　1）由于$G(E/F)$的定义知，$F_1\subseteq F(G(E/F_1))$，再证明，$F(G(E/F_1))\subseteq F_1$．若不然，则有$\alpha\in F(G(E/F_1))$，$\alpha\notin F_1$，从而，α是$F_1[x]$中的某一个次数>1的不可约多项式$p(x)$的根，α'是$p(x)$的异于α的根．由定理8，有τ，使$F_1(\alpha)\overset{\tau}{\simeq}F_1(\alpha')$，$\tau(\alpha)=\alpha'$，且$\tau$使$F_1$的元素不动．由结论13，E是$F_1$的正规扩域，从而，$\alpha'\in E$．将$\tau$延拓为E的自同构$\sigma$，$\sigma$使$F_1$的元素不动，$\sigma\in G(E/F_1)$，而$\sigma(\alpha)=\alpha'$，$\sigma(\alpha)\neq\alpha$，这就与$\alpha\in F(G(E/F_1))$矛盾．因此，$F(G(E/F_1))=F_1$．

2）由$F(H)$的定义知，$H\subseteq G(E/F(H))$．若，设$H=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k\}$，则，只要证明$|G(E/F(H))|\leqslant k$，就一定有$G(E/F(H))=H$．又，由定理12知，$|G(E/F(H))|=(E:F(H))$，所以，只要证明$(E:F(H))\leqslant k$，就可以了．由于E是F的有限正规扩域，所以$E=F(\alpha)$，考虑多项式$f(x)=(x-\sigma_1(\alpha))(x-\sigma_2(\alpha))\cdots(x-\sigma_k(\alpha))$．由群的消去律知，$\sigma_i\sigma_1$，$\sigma_i\sigma_2$，$\cdots$，$\sigma_i\sigma_k$是$\sigma_1$，$\sigma_2$，$\cdots$，$\sigma_k$一个的排列，从而$(\sigma_i\sigma_1)(\alpha)$，$(\sigma_i\sigma_2)(\alpha)$，$\cdots$，$(\sigma_i\sigma_k)(\alpha)$是$\sigma_1(\alpha)$，$\sigma_2(\alpha)$，$\cdots$，$\sigma_k(\alpha)$的一个排列，又，$f(x)$的系数是$\sigma_1(\alpha)$，$\sigma_2(\alpha)$，$\cdots$，$\sigma_k(\alpha)$的初等对称多项式，所以，对于任意的$\sigma_i$不动，从而，$f(x)\in F(H)[x]$．由于$\sigma_1$，$\sigma_2\cdots$，$\sigma_k$中有一个是恒等映

射，所以$f(\alpha)=0$．但是，$f(x)$的次数是k，所以，α关于$F(H)$的次数$\leqslant k$．显然，$E=F(H)(\alpha)$，所以，$(E:F(H))\leqslant k$．

3）由定理10知，$|G(E/F_1)|=(E:F_1)$，$|G(E/F)|=(E:F)$．根据扩域的次数定理，得到，$(E:F)=(E:F_1)(F_1:F)$．易证，$G(E/F_1)$是$G(E/F)$的子群，且成立$|G(E/F)|=|G(E/F_1)|\,[G(E/F):G(E/F_1)]$，所以，$[G(E/F):G(E/F_1)]=(F_1:F)$．证完．

定理11建立了E与F的中间域F_1与群$G(E/F)$的子群之间的一一对应关系．并且，$G(E/F(G(E/F_1)))=G(E/F_1)$．从而，就将域的问题转化为群的问题来讨论．这也就是伽罗华理论的基本出发点与基本思想．因此，常称定理11为伽罗华基本定理．

例5　$E=\mathbf{Q}(\omega,\sqrt[3]{2})$，$\omega=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$．由于$\sqrt[3]{2}$，$\omega$分别是$\mathbf{Q}[x]$中不可约多项式$x^3-3=(x-\sqrt[3]{2})(x-\omega\sqrt[3]{2})(x-\omega^2\sqrt[3]{2})$，$x^2+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)$的根，$(E:\mathbf{Q})=6$，所以，$G(E/\mathbf{Q})=\{e,\sigma,\sigma^2,\tau,\sigma\tau,\sigma^2\tau\}$，$\sigma(\sqrt[3]{2})=\omega\sqrt[3]{2}$，$\sigma(\omega)=\omega$，$\tau(\sqrt[3]{2})=\sqrt[3]{2}$，$\tau(\omega)=\omega^2$．$G(E/\mathbf{Q})$的子群是$\{e\}$，$H_1=\{e,\sigma,\sigma^2\}$，$H_2=\{e,\tau\}$，$H_3=\{e,\sigma\tau\}$，$H_4=\{e,\sigma^2\tau\}$，$G$；对应的子域分别是$E$，$F_1=\mathbf{Q}(\omega)$，$F_2=\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$，$F_3=\mathbf{Q}(\omega\sqrt[3]{2})$，$F_4=\mathbf{Q}(\omega^2\sqrt[3]{2})$，$\mathbf{Q}$．

五　多项式的伽罗华群

定义13　设F是域，$f(x)\in F[x]$，E是$f(x)$的分裂域，则称$G(E/F)$是$f(x)$的伽罗华群，记为$G(f(x))$．

定理12　$f(x)\in F[x]$的伽罗华群$G(f(x))$同构于某个置换群，从而，就说$G(f(x))$是一个置换群．

证明　设$f(x)$有k个不同的根$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$，则$f(x)$的分裂域$E=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$．由定理8，对于$\sigma\in G(f(x))$，$\sigma(\alpha_i)=\alpha_{j_i}$，$\alpha_{j_1}$，$\alpha_{j_2}$，$\cdots$，$\alpha_{j_k}$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$的一个排列．由于E的任一元素均表示为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$的多项式$h(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$，其系数在F中，所以，该元素在$\sigma$之下的象为$h(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_k))=h(\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_k})$，因此，$\sigma$与置换$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$相互唯一决定．若记这种$k$元置换所成的集合为$\bar{G}$，则$\sigma$与

$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$的对应是$G(f(x))$到$\overline{G}$的双射．易证明，置换的乘法是$\overline{G}$的代数运算，且$G(f(x))\simeq\overline{G}$，从而$\overline{G}$作成一个置换群．证完．

求$G(f(x))$是一个较复杂的问题，此处从略．下列只列出一个结果．

例6　$f(x)=x^3-3x+1\in\mathbf{Q}[x]$，$G(f(x))=\{(1),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\}$．

定理13　$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，其系数$a_1$，$a_2$，…，$a_n$是文字，则$G(f(x))=S_n$．

定理13的证明较复杂，从略．我们可以这样理解：$f(x)$的n个根α_1，α_2，…，α_n是相互独立的，从而，定理12的证明所决定的置换是n元置换，且根α_1，α_2，…，α_n的任一个排列都诱导出一个自同构σ，所以共有$n!$个，即$G(f(x))=S_n$．

六　代数方程可以根式解的条件

先介绍根式解的有关概念．

定义14　若$f(x)$是多项式，则称方程$f(x)=0$是代数方程．

定义15　设$E=F(\alpha)$，α是$x^n-a\in F[x]$的根，即$\alpha^n\in F$，则称E是F的根式扩域．

结论14　若E是F的根式扩域，$(E:F)=n$，则有一系列中间域$F_0=F$，F_1，F_2，…，F_{t-1}，$F_t=E$，使得$F_0\subset F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_{t-1}\subset F_t$，$(F_{i+1}:F_i)=p_i$，$p_i$是素数，$i=0,1,2,\cdots,t-1$．

证明　由定义15，$E=F(\alpha)$，$\alpha^n\in F$．由于$(E:F)=n$，所以x^n-a（$a=\alpha^n$）是$F[x]$中的不可约多项式．设$n=p_1p_2\cdots p_t$是素因数分解式，$\alpha_{i+1}=\alpha^{p_{i+2}\cdots p_t}$，$F_{i+1}=F_i(\alpha_{i+1})$，$i=0,1,\cdots,t-2$，$\alpha_t=\alpha$，则$F_0=F$，$F_1=F(\alpha_1)$，$F_2=F_1(\alpha_2)$，…，$F_{t-1}=F_{t-2}(\alpha_{t-1})$，$F_t=F_{t-1}(\alpha_t)=F_{t-1}(\alpha)=F(\alpha)=E$．由扩域的次数定理及$p_i$均为素数，得出$(F_{i+1}:F_i)=p_i$，$i=0,1,\cdots,t-1$．证完．

定义16　设$f(x)\in F[x]$，E是$f(x)$的分裂域．若有一系列中间域F_1，F_2，…，F_s，使得$F=F_0\subset F_1\subset\cdots\subset F_s=E$，$F_{i+1}$是$F_i$的根式扩域，$i=0,1,2,\cdots,s-1$，则称代数方程$f(x)=0$可以根式解

为了给出可以根式解的条件，再作些准备．

定理14 设E是F的有限正规扩域，F_1是中间域，$F \subseteq F_1 \subseteq E$，则$F_1$是F的正规扩域$\Leftrightarrow$G（$E/F_1$）是G（E/F）的正规子群.

证明 $\Rightarrow$. 由条件知，F_1是F的有限代数扩域，所以，由定理6知，$F_1 = F(\alpha)$，α是F〔x〕中不可约多项式$f(x)$的根．对于$\sigma \in G(E/F)$，根据定理8，$\sigma(\alpha)$也是$f(x)$的根，由于F_1是F的正规扩域，所以$\sigma(\alpha) \in F_1$，从而$F_1 = F(\sigma(\alpha))$．对于G（E/F）中的任意σ及G（E/F_1）中的任意λ，由代数单扩域的结构定理，只要证明$\sigma\lambda\sigma^{-1}$使$\sigma(\alpha)$不动，就有$\sigma\lambda\sigma^{-1}$使F_1的元素不动．实际上，由$\alpha \in F_1$知，$\lambda(\alpha) = \alpha$，从而$(\sigma\lambda\sigma^{-1})(\sigma(\alpha)) = (\sigma\lambda)((\sigma^{-1}\sigma)(\alpha)) = (\sigma\lambda)(\alpha) = \sigma(\lambda\alpha)) = \sigma(\alpha)$．因此，$\sigma\lambda\sigma^{-1} \in G(E/F_1)$，$G(E/F_1)$是$G(E/F)$的正规子群.

$\Rightarrow$ 设$G(E/F_1)$是$G(E/F)$的正规子群，则$G(E/F_1) = \sigma(G(E/F_1))\sigma^{-1}$，对于任意$\sigma \in G(E/F)$．如上所述，$F_1 = F(\alpha)$，$\alpha$是F〔$x$〕中不可约多项式$f(x)$的根．如能证明$f(x)$的任一个根均属于$F_1$，则$F_1$是$f(x)$的分裂域，从而，由定理9知，$F_1$是F的正规扩域.

实际上，由$G(E/F)$的定义及定理8，对于任意$\sigma \in G(E/F)$，$\sigma(\alpha)$均为$f(x)$的根，并且，$f(x)$的任一根均可写为$\sigma(\alpha)$的形状．上面已经证明，$G(E/F_1) = \sigma G(E/F_1)\sigma^{-1}$中的任意元素均使$\sigma(\alpha)$不变，因此，$\sigma(\alpha) \in F(G(E/F_1))$．根据定理11，$F(G(E/F_1)) = F_1$，所以$\sigma(\alpha) \in F_1$．证完.

结论15 设数域F含有n次本原单位根，E是F的根式扩域，$(E:F) = n$，则E是某个多项式$x^n - a \in F$〔x〕的分裂域，从而是正规扩域.

证明 记$E = F(\alpha)$，$\alpha^n = a \in F$，则$x^n - a \in F$〔x〕．设ε是一个n次本原单位根，则α，$\varepsilon\alpha$，$\varepsilon^2\alpha$，…，$\varepsilon^{n-1}\alpha$是$x^n - a$在E中的n个根，所以E是$x^n - a$的分裂域．再由定理9，E是F的正规扩域．证完.

注 下面均假定F是含有任意次本原单位根的域，这样不改变根式解问题的性质，因为F添加本原单位根所得的扩域是根式扩域.

结论16 设E是F的正规扩域，$(E:F) = p$，p是素数，则E可以由F经一系列根式扩域得到.

证明 由于$(E:F) = p$，所以可设$E = F(\alpha)$，α是F〔x〕中p次不可约多项式$p(x)$的根．如能证明α可以由F上的根式经加减乘除四则运算表出，则结论成立.

由于$(E:F) = p$，所以，由定理11知，$|G(E/F)| = p$，从而，易证$G(E/F)$是p阶循环群，记$G(E/F) = \{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \cdots, \sigma^{p-1}\}$.

由于E是F的正规扩域，所以，$p(x)$ 的p根个$\alpha_1=\alpha$，α_2，…，α_p均在E中，设ε是一个p次本原单位根，考察下面的关于α_1，α_2，…，α_p的线性方程组

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_p==\gamma_0 \\ \alpha_1+\varepsilon\alpha_2+\varepsilon^2\alpha_3+\cdots+\varepsilon^{p-1}\alpha_p=\gamma_1 \\ \alpha_1+\varepsilon^2\alpha_2+\varepsilon^4\alpha+\cdots+\varepsilon^{2(p-1)}\alpha_p=\gamma_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1+\varepsilon^{p-1}\alpha_2+\varepsilon^{2(p-1)}\alpha_3+\cdots+\varepsilon^{(p-1)^2}\alpha_p=\gamma_{p-1}. \end{cases}$$

该线性方程组的系数均属于E，且系数行列式为一范得蒙行列式，不为零，从而，可用ε及γ_0，γ_1，γ_2，…，γ_{p-1}用加减乘除四则运算将α_1，α_2，…，α_p表示出来.

由定理12，σ是一个p_循环置换，记$\sigma=(1\ 2\cdots p)$．用σ作用于

$\alpha_1+\varepsilon^k\alpha_2+\varepsilon^{2k}\alpha_3+\cdots+\varepsilon^{(p-1)k}\alpha_p$，得到$\alpha_2+\varepsilon^k\alpha_3+\varepsilon^{2k}\alpha_4+\cdots+\varepsilon^{(p-2)k}\alpha_p+\varepsilon^{(p-1)k}\alpha_1$．由于$\varepsilon^{(p-1)k}=\varepsilon^{pk-k}=\varepsilon^{pk}\varepsilon^{-k}=\varepsilon^{-k}$，所以$\alpha_2+\varepsilon^k\alpha_3+\varepsilon^{2k}\alpha_4+\cdots+\varepsilon^{(p-2)k}\alpha_p+\varepsilon^{(p-1)k}\alpha_1=\gamma_k\varepsilon^{-k}$，因此，$\sigma(\gamma_k)=\gamma_k\varepsilon^{-k}$．由于$(\gamma_k\varepsilon^{-k})^p=\gamma_k{}^p$，所以$\sigma(\gamma_k{}^p)=(\sigma(\gamma_k))^p=(\gamma_k\varepsilon^{-k})^p=\gamma_k{}^p$，因此$\gamma_k{}^p\in$F．记$\gamma_k{}^p=a_k$，则$\gamma_k$是$a_k$的$p$次方根，为方便，记$\gamma_k=\sqrt[p]{a_k}$，$k=1，2，\cdots，p-1$．另外，由根与系数的关系知，$\gamma_0\in$F，为一致起见，记$a_0=\gamma_0$．从而就有

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_p=a_0 \\ \alpha_1+\varepsilon\alpha_2+\varepsilon^2\alpha_3+\cdots+\varepsilon^{p-1}\alpha_p=\sqrt[p]{a_1} \\ \alpha_1+\varepsilon^2\alpha_2+\varepsilon^4\alpha_3+\cdots+\varepsilon^{2(p-1)}\alpha_p=\sqrt[p]{a_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1+\varepsilon^{p-1}\alpha_2+\varepsilon^{2(p-1)}\alpha_3+\cdots+\varepsilon^{(p-1)^2}\alpha_p=\sqrt[p]{a_{p-1}}. \end{cases}$$

这样，就得E=F(α)=F$(a_0，\sqrt[p]{a_1}，\sqrt[p]{a_2}，\cdots，\sqrt[p]{a_{p-1}})$．易知，F$\subset$F$(\sqrt[p]{a_1})\subset$F$(\sqrt[p]{a_1})(\sqrt[p]{a_2})\subset\cdots\subset$F$(\sqrt[p]{a_1})(\sqrt[p]{a_2})\cdots(\sqrt[p]{a_{p-1}})$=E．证完.

下面给出代数方程可以根式解的条件.

定理15　设F是数域，$f(x)\in$F〔x〕，则代数方程$f(x)=0$可以根式解$\Leftrightarrow f(x)$的伽罗华群G（$f(x)$）是可解群.

证明　$\Rightarrow$. 设E是$f(x)$的分裂域，则由条件及定义16知，有F=$F_0\subset F_1\subset F_2\subset$

$\cdots\subset F_s=E$，F_{i+1}是F_i的根式扩域，$i=0,1,2,\cdots,s-1$．由结论14，可以假定$(F_{i+1}:F_i)=p_i$，p_i是素数，$i=0,1,2\cdots,s-1$．由于E是$f(x)$的分裂域，所以，由定理9知，E是F的正规扩域，再由结论13知，E是F_i的正规扩域，从而，可记$G_i=G(E/F_i)$，$i=1,2,\cdots,s-1$，$G_0=G(f(x))=G(E/F)$，$G_s=G(E/E)=\{e\}$．于是得到，$\{e\}=G_s\subset G_{s-1}\subset\cdots\subset G_1\subset G_0=G(f(x))$．由结论15知，$F_{i+1}$是$F_i$的正规扩域，$i=0,1,2,\cdots,s-1$，所以，由定理14知，$G_{i+1}$是$G_i$的正规子群．根据定理11，$[G_i:G_{i+1}]=(F_{i+1}:F_i)$，但$(F_{i+1}:F_i)=p_i$，所以$|G_i/G_{i+1}|=p_i$，$i=0,1,2,\cdots,s-1$，因此，由定义7知，$G_0=(f(x))$是可解群．

$\Leftarrow$．设E是$f(x)$的分裂域，由于$G=G(f(x))$是可解群，所以，由定义7得，存在G的子群$G_0=G$，G_1，G_2，…，$G_s=\{e\}$，使$G_0=G\supset G_1\supset G_2\supset\cdots\supset G_s=\{e\}$，$G_{i+1}$是$G_i$的正规子群，且$|G_i/G_{i+1}|=p_i$，$p_i$是素数，$i=0,1,2,\cdots,s-1$．

记$F_i=F(G_i)$，$i=0,1,2,\cdots,s$，则有$F=F_0\subset F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_s=E$．由于E是$f(x)$的分裂域，所以由定理9知，E是F的正规扩域．根据定理11，$G(E/F_i)=G(E/F(G_i))=G_i$，由于G_{i+1}是G_i的正规子群，所以，由定理14知，F_{i+1}是F_i的正规扩域，$i=0,1,2,\cdots,s-1$．根据定理11，$(F_{i+1}:F_i)=[G_i:G_{i+1}]$，$|G(F_{i+1}/F_i)|=(F_{i+1}:F_i)$，而$[G_i:G_{i+1}]=p_i$，所以$|G(F_{i+1}/F\ )|=p_i$，$G(F_{i+1}/F_i)$是$p_i$阶循环群，从而，根据结论16，$F_{i+1}$是$F_i$的根式扩域，$i=0,1,2,\cdots,s-1$．因此，根据定义16，$f(x)=0$可以根式解．证完．

例7　$f(x)=x^3-3x+1\in\mathbf{Q}[x]$．由例6，$G(f(x))=\{(1),(123),(132)\}$．由定义7，$G(f(x))$是可解群．再定理15，$x^3-3x+1=0$可以根式解．

例8　$f(x)=x^5+3x+3\in\mathbf{Q}[x]$，可以证明$G(f(x))=S_5$，从略．$S_5$不是可解群，所以由定理15得，$x^5+3x+3=0$不可以根式解．

定理16　$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，其中系数$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n$是文字，则当$n\geqslant5$时，$n$次一般方程$f(x)=0$不可以根式解．

证明　由定理13，$G(f(x))=S_n$；又，由定理5，当$n\geqslant5$时，S_n不是可解群；再由定理15，$f(x)=0$不可以根式解．证完．

参考文献

〔1〕孙宗明，n元置换的分解，益阳师专学报（自然科学版），1987年第1期．
〔2〕熊全淹，近世代数，上海科学技术出版社，1978．

（孙宗明）

附录四　有限维向量空间

第Ⅰ章　空间

§1　域

若在由对象（纯量）组成的某个集合中定义了加法与乘法，并且条件(A),(B),(C)均满足，则称该集合（与给定的运算一起）是一个域。

§2 向量空间

定义．其元素被称为向量的集合V是向量空间，若满足下面的公理．

(A) 对于V中的任意一对向量x，y，都对应V中的一个向量$x+y$，称为x与y的和，并且

（1）加法是交换的，$x+y=y+x$，

（2）加法是结合的，$x+(y+z)=(x+y)+z$，

（3）V中存在唯一的向量0，使得对于任意向量x，$x+0=x$，

（4）对于V中任意向量x，都对应唯一的向量$-x$，使得$x+(-x)=0$．

（B）对于任意一对α与x，其中α是一个纯量而x是V中的向量，都对应V中的一个向量αx，称为α与x的积，并且

（1）乘法对于纯量是结合的，$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$，

（2）对于任意向量x，$1x=x$，

（C）（1）乘法对于向量的加法是分配的，$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$，

（2）乘法对于纯量的加法是分配的，$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$．

§3　例子

（3）n维复坐标空间C^n（$n=1,2,\cdots$），若$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$与$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n$是C^n的元素，则

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\ \cdots,\ \xi_n+\eta_n),$$

$$\alpha x=(\alpha\xi_1,\ \cdots,\ \alpha\xi_n),$$

$$0=(0,\ \cdots,\ 0),$$

$$-x=(-\xi_1,\ \cdots,\ -\xi_n).$$

§4　注释

若纯量是环（代替域）的元素，则对应于向量空间的一般的概念称为模．

§5　线性相关性

定义．向量的有限集合 $\{x_i\}$ 是线性相关的，若相应地存在不为全零的纯量的集合 $\{\alpha_i\}$，使得

$$\sum_i \alpha_i x_i = 0.$$

另一方面，若 $\sum_i \alpha_i x_i = 0$ 得出 $\alpha_i = 0$ 对于每个 α_i，则集合 $\{x_i\}$ 是线性无关的

§6 线性组合

当 $x = \sum_i \alpha_i x_i$ 时，我们将说，x 是 $\{x_i\}$ 的线性组合．

定理．非零向量 $x_1, \cdots, x_n$ 的集合是线性相关的当且仅当某个 x_k（$2 \leqslant k \leqslant n$）是它前面的那些向量的线性组合．

§7 基

定义．向量空间V的一个（线性）基（或坐标系）是一线性无关向的量的集合X，使得V的每个向量是X的元素的线性组合．一个向量空间V是有限维的，若它有一个有限基．

定理．若V是一个有限维向量空间，$\{y_1, \cdots, y_m\}$ 是V中线性无关向量的集合，则，除非这些 y 已经形成一个基，我们能找到向量 $y_{m+1}, \cdots, y_{m+p}$，使得这些 y 的总体，即 $\{y_1, \cdots, y_m, y_{m+1}, \cdots y_{m+p}\}$，是一个基．换言之，每个线性无关的集合都可以扩充到一个基．

§8 维数

定理1．有限维向量空间V的任一基的元素的个数与任意其它的基是相同的．

定义．有限维向量空间V的维数是V的一个基中元素的个数．

定理2．n 维向量空间V中 $n+1$ 个向量的任意集合是线性相关的．V中 n 个向量的集合是一个基当且仅当它是线性无关的，或者，当且仅当V中任一向量都是这个集合元素的线性组合．

§9 同构

定义．两个向量空间U和V（在相同的域上）是同构的，若有U的向量 x 与V的向量 y 之间的一一对应，$y = T(x)$，使得

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2).$$

定理．域F上的任意 n 维向量空间V同构于 F^n．

§10 子空间

定义．向量空间V的一个非空子集M是一个子空间，或线性流形，若对于包含于

M中的任意一对向量x，y，每个线性组合$\alpha x+\beta y$也包含于M中。

§11 子空间的运算

定理1．若干子空间的交是子空间。

定理2．若S是向量空间V的向量集合，M是S生成的子空间，则S的元素的所有线性组合作成的子集合与M是相同的。

定理3．若K和L是任意两个子空间，M是由K和L共同生成的子空间，则所有形如$x+y$的向量作成的集合与M是相同的，其中x在K中，y在L中．

§12 子空间的维数

定理1．n维向量空间V的子空间M是维数$\leqslant n$的向量空间．

定理2．给定n维向量空间V的任意m维子空间M，我们可以找到V的一个基$\{x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n\}$，使得$x_1, \cdots, x_m$在M中，从而形成M的一个基．

§13 对偶空间

定义．向量空间V上的一个线性函数是对于每个向量x都定义的一个纯量值函数y，具有性质（向量x_1与x_2和纯量α_1与α_2）

$$y(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=\alpha_1 y(x_1)+\alpha_2 y(x_2)。$$

设V是任意线性空间，V′是V的所有线性函数的集合．我们用0表示由$y=0$（对V中的任意x）定义的线性函数，若y_1与y_2是V上的线性函数，α_1与α_2是纯量，我们把由

$$y(x)=\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)$$

定义的函数写为y，容易看出，y是一个线性函数，我们记作$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2$．由这些线性概念（零，加法，纯量乘法）的定义，集合V′形成一个向量空间，称为V的对偶空间。

§14 方括号

对于每一对x与y，其中x是V中的向量，y是V′的元素，我们作对应$[x, y]$，纯量$[x, y]$定义为y在x的值．

$$[\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2, y]=\alpha_1 [x_1, y]+\alpha_2 [x_2, y],$$

$$[x, \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2]=\alpha_1 [x, y_1]+\alpha_2 [x, y_2].$$

称$[x, y]$是V中的向量x与V′中的向量y的双线性函数．

§15 对偶基

定理1．若V是n维向量空间，$\{x_1, \cdots, x_n\}$是V的一个基，$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$是$n$个纯量作成的任意集合，则有且仅有V的一个线性函数，使得$[x_i, y]=\alpha_i$，$i=1, \cdots, n$．

定理2．若V是n维向量空间，$X=\{x_1, \cdots, x_n\}$是V的一个基，则有唯一确定的V′的基$X'=\{y_1,\cdots,y_n\}$，具有性质$[x_i, y_j]=\delta_{ij}$．由此，n维向量空间的对偶空间是n维的．

基X′称为X的对偶基．

定理3．若u与v是n维向量空间V的任意两个不同的向量，则存在V的一个线性函数y，使得$[u,y]\neq[v,y]$，或者，等价地，对V的任意非零向量x，都对应于V′中的一个y，使得$[x, y]\neq 0$．

§16　自反性

定理．若V是有限维向量空间，则对应于V′上的每个线性函数z_0，都存在V中的一个向量x_0，使得对于V′中的每个y，$z_0(y)=[x_0, y]=y(x_0)$；并且，对应$z_0\leftrightarrow x_0$是V″与V的同构．

在这个陈述中所描述的对应称为V″与V之间的自然对应．

§17　零化子

定义．向量空间V的任意子集S(S不必是子空间)的零化子S^0是V′中所有向量y的集合，使得对于S中的所有x，$[x, y]$恒为零．

定理1．若M是n维向量空间V的m维子空间，则M^0是V′的$n-m$维子空间．

定理2．若M是有限维的向量空间V的子空间，则$M^{00}(=(M^0)^0)=M$．

§18　直和

定义．若U与V是向量空间（在相同的域上），则它们的直和是向量空间W（记作U⊕V），其元素是一切有序对$\langle x, y\rangle$，x在U中，y在V中，线性运算按

$$\alpha_1\langle x_1, y_1\rangle+\alpha_2\langle x_2, y_2\rangle=\langle\alpha_1x_1+\alpha_2x_2, \alpha_1y_1+\alpha_2y_2\rangle.$$

定理．若U与V是向量空间W的子空间，则下列三个条件是等价的．

（1）W=U⊕V．

（2）$U\cap V=0$与$U+V=W$（即，U与V均是另一个的补）．

（3）W中的每个向量z，能而且只能用一种方式写为$z=x+y$的形式，x在U中，y在V中．

§19　直和的维数

定理1．直和的维数是它的被加空间的维数的和．

定理2．若W是任意$n+m$维向量空间，U是W的任意n维子空间，则存在W的m维子空间V，使得W=U⊕V．

§20　直和的对偶

定理．若M与N是向量空间，$V=M\oplus N$，则M'同构于N^0，N'同域于M^0，且$V'=M^0\oplus N^0$．

§21 商空间

设M是向量空间V的子空间．若x是V中的任意向量，我们把所有和$x+y$（y在M中）的集合写为$x+M$，每个形如$x+M$的集合称为M的陪集．

我们的定义

$$(x+M)+(y+M)=(x+y)+M,$$

$$\alpha(x+M)=\alpha x+M,$$

则所有陪集的集合对于上面定义的线性运算形成一个向量空间，称为V的模M商空间，记作V/M．

§22 商空间的维数

定理1．若M与N是向量空间V的补子空间，则指定N中的每个向量y与陪集$y+M$的对应是N与V/M之间的一个同构．

定理2．若M是n维向量空间V的m维子空间，则V/M有维数$n-m$．

§23 双线性型

若U与V是向量空间（在相同的域上），$W=U\oplus V$，w是W上的函数，在W的元素$\langle x, y\rangle$的值将记为$w(x, y)$．

W上的纯量值函数w是一个双线性型（或双线性函数），若

$$w(\alpha_1 x_1+\beta_2 x_2, y)=\alpha_1 w(x_1, y)+\alpha_2 w(x_2, y),$$

$$w(x, \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)=\alpha_1 w(x, y_1)+\alpha_2 w(x, y_2).$$

若w_1与w_2是W上的两个双线性型，α_1与α_2是纯量，定义

$$w=\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2, \quad w(x, y)=\alpha_1 w_1(x,y)+\alpha_2 w_2(x,y).$$

定理1．若U是有基$\{x_1, \cdots, x_n\}$的n维向量空间，V是有基$\{y_1, \cdots, y_m\}$的m维向量空间，$\{\alpha_{ij}\}$是nm个纯量的任意集合($i=1, \cdots, n$; $j=1, \cdots, m$)，则有且仅有一个$U\oplus V$上的双线性型$w(x_i, y_j)=\alpha_{ij}$，对所有的i与j．

定理2．若U是有基$\{x_1, \cdots, x_n\}$的n维向量空间，V是有基$\{y_1, \cdots, y_m\}$的m维向量空间，则在由$U\oplus V$上的所有双线性型作成的向量空间中，存在唯一确定的基$\{w_{pq}\}$ ($p=1, \cdots, n; q=1, \cdots, m$)，具有性质$w_{pq}(x_i, y_j)=\delta_{ip}\delta_{jq}$，因此，$U\oplus V$上的双线性型作成的空间的维数是U与V的维数的积．

§24 张量积

两个向量空间U与V（在相同的域上）的张量积是，对于U中的每个x与V中的每

个y，都对应U⊗V中的一个“积”$z=x\otimes y$，并且，对于每个固定的y，x与z间的对应，对于每个固定的x，y与z间的对应，都是线性的.

$$(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\otimes y=\alpha_1(x_1\otimes y)+\alpha_2(x_2\otimes y),$$

$$x\otimes(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)=\alpha_1(x\otimes y_1)+\alpha_2(x\otimes y_2).$$

$x\otimes y$定义为x与y的双线性型（向量值）函数.

§25 积的基

定义. 两个有限维的向量空间U与V（在相同的域上）的张量积U⊗V是U⊕V上的所有双线性型所作成的向量空间的对偶. 对于任意向量对x，y，x在U中，y在V中，x与y的张量积$z=x\otimes y$是由$z(w)=w(x,y)$（对于每个双线性型w）定义的U⊗V中的元素.

定理. 若$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$与$Y=\{y_1,\cdots,y_m\}$分别是U与V的基，则向量$z_{ij}=x_i\otimes y_j(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m)$的集合Z是U⊗V的一个基.

§26 置换

1与k之间的整数的置换是一个一一变换，每个整数指派为另一个.1与k之间的整数的所有置换的集合作成一个群，记为S_k.

§27 循环

定理1. 每个置换是互不相交的循环的积.

定理2. 每个循环是对换的积.

定理3. 每个置换是对换的积.

§28 奇偶性

置换π是偶的，若$\pi f=f$；是奇的，若$\pi f=-f$. 每个对换都是奇的.

所有偶置换的集合是S_k的一个子群，记为A_k.

§29 多重线性型

设V_1，V_2，…，V_k是向量空间(在相同的域上)，一个k-线性型是直和$V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$上的一个纯量值函数，具有性质，对于任意$k$-1个变量的固定的值，它线性地依赖于余下的一个向量.

若w_1与w_2是k-线性型，α_1与α_2是纯量，w由

$$w(x_1,\cdots,x_k)=\alpha_1 w_1(x_1,\cdots,x_k)+\alpha_2 w_2(x_1,\cdots,x_k)$$

定义，x_i在V_i中，$i=1,\cdots,k$，则w是一个k-线性型，记为$\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2$. 所有$k$-线性型对于这样定义的线性运算作成一个向量空间，它的维数是积$n_1\cdots n_k$，n_i是V_i

的维数.

若w是一个k-线性型，π在S_k中，我们写

$$\pi w(x_1,\cdots,x_k)=w(x_{\pi(1)},\cdots,x_{\pi(k)}).$$

k-线性型w称为对称的，若对于S_k中的任意置换π，有$\pi w=w$.

§30 交错型

一个k-线性型w是斜对称的，若对于S_k中的所有奇置换π，有$\pi w=-w$.

一个k-线性型w称为交错的，若当有两个x相同时，$w(x_1,\cdots,x_k)=0$.

定理1. 任意交错多重线性型是斜对称的.

定理2. 若$x_1,\cdots,x_k$是线性相关的向量，w是一个交错k-线性型，则$w(x_1,\cdots,x_k)=0$

定理3. 若w是一个非零交错n-线性型，$x_1,\cdots,x_n$是线性无关的向量，则$w(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$.

§31 极大次数的交错型

定理. n维向量空间上的交错n-线性型作成的向量空间是1维的.

第Ⅱ章 变换

§32 线性变换

定义. 向量空间V的一个线性变换（或算子）是这样的一个对应A，它指派V中的每个向量x到V中的向量Ax，并且

$$A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay.$$

§33 变换看作向量

若A与B是线性变换，我们按等式$Sx=Ax+Bx$（对每个x）定义它们的和$S=A+B$. 对于A与纯量α，我们按等式$(\alpha A)x=\alpha(Ax)$定义乘积αA.

定理. 一个向量空间的所有线性变换的集合自身也是一个向量空间.

§34 积

两个线性变换A与B的乘积$P=AB$，按等式$Px=A(Bx)$定义.

§35 多项式

若$p(t)$是纯量系数的变量t的任意多项式，$p(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\cdots+\alpha_n t^n$，我们能够形成一个线性变换

$$p(A)=\alpha_0 1+\alpha_1 A+\cdots+\alpha_n A^n.$$

由$p(t)q(t)=r(t)$推出$p(A)q(A)=r(A)$.

§36 逆

可能出现这样的情况，线性变换A具有下面两个很特殊的性质中的一个或两个。

（1）若$x_1 \neq x_2$，则$Ax_1 \neq Ax_2$。

（2）对于任一个向量y，至少对应一个向量x，使得$Ax=y$。

若A同时具有这些性质，则我们将说A是可逆的。若A是可逆的，则我们按下面的方式定义一个线性变换，称为A的逆变换，记为A^{-1}。若y_0是任意向量，我们能够找到一个向量x_0，使得$Ax_0=y_0$，并且,这个x_0是唯一决定的,我们定义$A^{-1}y_0$就是x_0。

定理1．若A，B与C是线性变换，使得

$$AB=CA=1,$$

则A是可逆的，并且$A^{-1}=B=C$。

定理2．有限维向量空间V的一个线性变换A是可逆的当且仅当用$Ax=0$推出$x=0$，或者，当且仅当V中的任意向量y能写为$y=Ax$的形式。

定理3．若A与B是可逆的，则AB是可逆的，并且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。若A是可逆的，$\alpha \neq 0$ 则αA是可逆的，并且$(\alpha A)^{-1}=\alpha^{-1}A^{-1}$。若A是可逆的，则$A^{-1}$是可逆的，并且$(A^{-1})^{-1}=A$。

§37 矩阵

定义．设V是n维向量空间，$X=\{x_1, \cdots, x_n\}$是V的一个基，A是V的线性变换．因为每个向量都是x_i的线性组合，特别地，我们有

$$Ax_j=\sum_i \alpha_{ij}x_i,$$

对于$j=1, \cdots n$，n^2个纯量(α_{ij})的集合是A在坐标系X下的矩阵，一般地，我们记为〔A〕：

$$[A]=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2}\cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

§38 线性变换的矩阵

定理．所有矩阵(α_{ij})，(β_{ij})等的集合中，i，$j=1,\cdots,n$（不考虑线性变换的关系），我们定义和，数乘，积，(0_{ij})，(e_{ij})，

$$(\alpha_{ij})+(\beta_{ij})=(\alpha_{ij}+\beta_{ij}),$$

$$a(\alpha_{ij})=(a\alpha_{ij}),$$

$$(\alpha_{ij})(\beta_{ij})=(\sum_k \alpha_{ik}\beta_{kj})$$

$$0_{ij}=0,\ e_{ij}=\delta_{ij}.$$

则V的所有线性变换A与所有矩阵(α_{ij})之间的按$Ax_j=\sum_i \alpha_{ij}x_i$描述的对应（建立于$n$维向量空间 V 的任意坐标系 X= $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 上）是一个同构；换言之，它是一个一一对应，并保持和，数乘，积，0与1．

§39 不变性

在一个向量空间的子空间N与该空间的线性变换A之间的一个可能的关系是不变性．我们说N在A之下是不变的，若由x在N中推出Ax在N中．

§40 可约性

不变性概念的特别重要的情况是可约性．

§41 射影

定义．若V是M与N的直和，则V中的每个向量z唯一地写为$z=x+y$的形式，x在M中，y在N中，M上沿N的射影是由E$z=x$定义的变换．

定理1．一个线性变换E是某个子空间上的射影当且仅当它是幂等的，即$E^2=E$．

定理2．若E是M上沿N的射影，则M与N分别是方程E$z=z$与E$z=0$的所有解的集合．

定理3．一个线性变换E是射影当且仅当1－E是射影；若E是M上沿N的射影，则1－E是N上沿M的射影．

§42 射影的组合

定理．我们假定E_1与E_2分别是M_1与M_2上沿N_1与N_2的射影，并且，纯量的基础域满足$1+1\neq 0$．于是，我们得到三个断言．

（1）E_1+E_2是射影当且仅当$E_1E_2=E_2E_1=0$；若这个条件满足，则$E=E_1+E_2$是M上沿N的射影，其中$M=M_1\oplus M_2$，$N=N_1\cap N_2$．

（2）E_1-E_2是射影当且仅当$E_1E_2=E_2E_1=E_2$；若这个条件满足，则$E=E_1-E_2$是M上沿N的射影，其中$M=M_1\cap N_2$，$N=N_1\oplus M_2$．

（3）若$E_1E_2=E_2E_1=E$，则E是M上沿N的射影，其中$M=M_1\cap M_2$，$N=N_1+N_2$．

§43 射影与不变性

定理1．若M是在线性变换A下不变的子空间，则对M上的每个射影E，EAE＝AE．反之，若对于M上的每个射影E，EAE＝AE，则M在A下是不变的．

定理2．若M与N是子空间，V＝M⊕N，则线性变换A按照对（M，N）可约的必要充分条件是EA＝AE，其中的E是M上沿N的射影．

§44 伴随

设V是任意向量空间，y是V′的任意元素，对于V的任意线性变换A，考虑式子〔Ax，y〕．对于每个固定的y，由$y'(x)=$〔Ax，y〕定义的函数y'是V上的线性函数．我们有〔Ax，y〕＝〔x，y'〕．若写$y'=A'y$，则A′的定义性质是

（1）　　$[Ax, y]=[x, A'y]$，

A′是V′的一个线性变换，并且

（2）　　$0'=0$，

（3）　　$1'=1$，

（4）　　$(A+B)'=A'+B'$，

（5）　　$(\alpha A)'=\alpha A'$，

（6）　　$(AB)'=B'A'$，

（7）　　$(A^{-1})'=(A')^{-1}$，

（8）　　$A''=A$．

§45 射影的伴随

定理1．若E是M上沿N的射影，则E′是N^0上沿M^0的射影．

定理2，若M在A下是不变的，则M^0在A′下是不变的；若A按（M，N）是可约的，则A′按(M^0，N^0)是可约的．

§46 基变换

设V是一个n维向量空间，$X=\{x_1, \cdots, x_n\}$与$Y=\{y_1, \cdots, y_n\}$是V中的两个基．我们可以问下面的两个问题．

问题Ⅰ．若x在V中，$x=\sum_i \xi_i x_i=\sum_i \eta_i y_i$，则它对于基X的坐标（$\xi_1, \cdots, \xi_n$）与它对于基Y的坐标（$\eta_1, \cdots, \eta_n$）之间的关系是什么？

问题Ⅱ．若($\xi_1, \cdots, \xi_n$)是n个纯量的有序集合，则向量$x=\sum_i \xi_i x_i$与$y=\sum_i \xi_i y_i$之间的关系是什么？

§47 相似

问题Ⅲ．若B是V上的线性变换，则它在基X下的矩阵（β_{ij}）与它在基Y下的矩阵（γ_{ij}）之间的关系是什么？

问题Ⅳ．若（β_{ij}）是一个矩阵，则分别由$Bx_j=\sum\limits_i\beta_{ij}x_i$与$Cy_j=\sum\limits_i\beta_{ij}y_i$所定义的线性变换B与C之间的关系什么？

§48　商变换

设A是向量空间V的线性变换，M是V的子空间，并且在A之下不变，用自然的方式定义空间V/M上的线性变换A/M：

$$(A/M)(x+M)=Ax+M.$$

§49　值域与零空间

定义．设A是向量空间V上的一个线性变换，M是V的一个子空间，则M在A下的象，用记号AM表示，是形如Ax的所有向量的集合，x在M中．A的值域 R（A）＝AV；A的零空间是使$Ax=0$的所有向量x的集合N(A)．

定理．若A是向量空间V的线性变换，则

（1）　　$(R(A))^0=N(A')$，

若V是有限维的，则

（2）　　$(N(A))^0=R(A')$．

§50　秩与零度

定义．A是有限维向量空间的线性变换，A的秩$\rho(A)$是R(A)的维数，A 的零度$\nu(A)$是N(A)的维数。

定理1．若A是n维向量空间的线性变换，则$\rho(A)=\rho(A')$，$\nu(A)=n-\rho(A)$．

定理2．若A是n维向量空间V的线性变换，K是V的h维子空间，则AK的维数$\geqslant h-\nu(A)$。

定理3．若A与B是有限维向量空间的的线性变换，则

$\rho(A+B)\leqslant\rho(A)+\rho(B)$，

$\rho(AB)\leqslant min\,\{\rho(A),\ \rho(B)\}$，

$\nu(AB)\leqslant\nu(A)+\nu(B)$．

若B是可逆的，则

$\rho(AB)=\rho(BA)=\rho(A)$．

§51　秩为1的线性变换

定理1．若A是有限维向量空间V的线性变换，并且$\rho(A)\leqslant 1$（即，$\rho(A)=0$或$\rho(A)=1$），则在每个坐标系下，A的矩阵〔A〕＝（α_{ij}）的元素有形式$\alpha_{ij}=$

$\beta_i\gamma_j$；反之，若A的矩阵在某一坐标系下有这个形式，则$\rho(A)\leqslant 1$。

定理2．若A是有限维向量空间V的秩为ρ的线性变换，则A可以写为ρ个秩为1线性变换的和。

定理3．对应于有限维向量空间V的任意线性变换A，有可逆线性变换P，使PA是射影。

§52 线性变换的张量积

设U与V是有限维向量空间（在相同域上），A与B分别是U与V的线性变换．W是U$\oplus$V上的所有双线型作成的空间，我们用

$$(\overline{C}w)(x,y)=w(Ax,By)$$

定义W上的一个线性变换$\overline{C}$．线性变换A与B的张量积$C=A\otimes B$是变换$\overline{C}$的对偶，

$$(Cz)(w)=z(\overline{C}w),$$

z在$U\otimes V$中，w在W中．

（1）　$Cz_0=Ax_0\otimes By_0$，

（2）　$A\otimes 0=0\otimes A=0$，

（3）　$1\otimes 1=1$，

（4）　$(A_1+A_2)\otimes B=(A_1\otimes B)+(A_2\otimes B)$，

（5）　$A\otimes(B_1+B_2)=(A\otimes B_1)+(A\otimes B_2)$，

（6）　$\alpha A\otimes\beta B=\alpha\beta(A\otimes B)$，

（7）　$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$，

（8）　$(A_1A_2)\otimes(B_1B_2)=(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)$．

若A与B的矩阵分别是$[A]=(\alpha_{ij})$，$[B]=(\beta_{ij})$，则$A\otimes B$的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}[B] \cdots \alpha_{1n}[B] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}[B] \cdots \alpha_{nn}[B] \end{pmatrix}.$$

§53 行列式

$det(AB)=(detA)(detB)$．

$detA=detA'$．

§54 特征值

纯量λ是线性变换A的特征值，非零向量x是A的特征向量，若$Ax=\lambda x$

§55 重数

设A是n维向量空间的线性变换，$\lambda_1, \cdots, \lambda_p$是它的不同的特征值．让我们用$m_j$记$\lambda_j$的代数重数，$j=1, \cdots, p$，则$m_1+\cdots+m_p=n$．

§56 三角型

定理1．若A是n维向量空间V的线性变换，则存在$n+1$个子空间$M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}, M_n$，具有下面的性质：

（1）每个M_j（$j=0, 1, \cdots, n-1, n$）在A之下是不变的，

（2）M_j的维数是j，

（3）$(0=)M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n(=V)$．

定理2．若A是n维向量空间V的线性变换，则存在V的一个基X，使得A在X下的矩阵〔A〕是三角型；或者，等价地，若〔A〕是任一矩阵，则存在可逆（非奇异）矩阵〔B〕，使得$〔B〕^{-1}〔A〕〔B〕$是三角型．

§57 幂零性

线性变换A称为幂零的，若存在严格正整数q，使得$A^q=0$；这样的最小的整数q是幂零指数．

定理1．设A是有限维向量空间V上的指数是q的幂零线性变换，x_0是使$A^{q-1}x_0 \neq 0$的向量，则向量$x_0, Ax_0, \cdots, A^{q-1}x_0$是线性无关的．若K是这些向量生成的子空间，则存在子空间L，使得$V=K \oplus L$，并且A按(K, L)是可约的．

定理2．若A是有限维向量空间V上的指数是q的幂零线性变换，则存在正整数r，$q_1, \cdots, q_r$与向量$x_1, \cdots, x_r$，使得

（1）$q_1 \geqslant \cdots \geqslant q_r$，

（2）向量

$$x_1, Ax_1, \cdots, A^{q_1-1}x_1,$$

$$x_2, Ax_2, \cdots, A^{q_2-1}x_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_r, Ax_r, \cdots, A^{q_r-1}x_r$$

形成V的一个基，

（3）$A^{q_1}x_1=A^{q_2}x_2=\cdots=A^{q_r}x_r=0$．

整数r，$q_1, \cdots, q_r$形成A的同构不变的完全系．换言之，若B是有限维向量空间W上

的另一个幂零线性变换，则存在V与W之间的同构T，使$TAT^{-1}=B$的心要充分条件是，整数r，q_1，…，q_r隶属于B与它们隶属于A是相同的.

§58 若当型

定理1.有限维向量空间V的每个线性变换是一个幂零变换和一个可逆变换的直和

定理2. 若A是有限维向量空间V的线性变换，λ_1，…，λ_p是A的不同的特征值，其代数重数分别是m_1，…，m_p，则V是p个子空间M_1，…，M_p的直和，其维数分别是m_1，…，m_p，并且，每个M_j在A之下是不变的，$A-\lambda_j$在M_j上是幂零的.

第Ⅱ章 正交性

§59 内积

$\mathbf{R}^2$中，$x=(\xi_1, \xi_2)$，$y=(\eta_1, \eta_2)$，$(x, y)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2$.

所考虑的向量对x，y的数值函数(x, y)的重要性质如下：它对于x与y是对称的，它线性地依赖于它的两个变量中的每一个，除非$x=0$，(x, x)的值总是严格正的. (x, y)称为x与y的内积或纯量积.

§60 复内积

$\mathbf{C}^2$中，$x=(\xi_1, \xi_2)$，$y=(\eta_1, \eta_2)$，$(x, y)=\xi_1\bar{\eta}_1+\xi_2\bar{\eta}_2$.

§61 内积空间

定义. 向量空间（实的或复的）的一个内积是（分别地，实的或复的）向量x与y的有序对的数函数值，使得

（1）　$(x, y)=\overline{(x, y)}$,

（2）　$(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2, y)=\alpha_1(x_1, y)+\alpha_2(x_2, y)$,

（3）　$(x, x)\geqslant 0$，$(x, x)=0$当且仅当$x=0$.

内积空间是带有内积的向量空间.

§62 正交性

向量x与y称为正交的，若$(x, y)=0$.

若ε是内积空间V中间量的任意集合，则我们用$\varepsilon^{\perp}$表示V中与ε中的每个向量都正交的所有向量集合. $\varepsilon^{\perp\perp}=(\varepsilon^{\perp})^{\perp}$.

§63 完全性

定理1. 若$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$是内积空间中的任意有限正交组，x是一个向量，$\alpha_i=(x, x_i)$，则成立贝塞尔不等式

$$\sum_i |\alpha_i|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

向量$x' = x - \sum_i \alpha_i x_i$与每个$x_j$正交，因此，与X所生成的子空间正交.

定理2. 若X是内积空间V中的有限正交组，则下面关于X的六个条件是相互等价的.

（1）正交组X是完全的.

（2）若$(x, x_i)=0$，$i=1, \cdots, n$，则$x=0$.

（3）X生成的子空间是整个空间V.

（4）若x在V中，则$x=\sum_i (x, x_i) x_i$.

（5）若x与y在V中，则（Parseval等式）

$$(x, y)=\sum_i (x, x_i)(x_i, y).$$

（6）若x在V中，则

$$\|x\|^2=\sum_i |(x, x_i)|^2.$$

§64 施瓦兹不等式

定理. 若x与y是内积空间中的向量，则

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \|y\|.$$

§65 完全正交组

定理. 若V是n维内积空间，则V中存在完全正交组，V中的每个完全正交组恰好包含n个元素. V的正交维数与它的线性维数相同.

§66 射影定理

定理. 若M是有限维内积空间V的任意子空间，则V是M与$M^{\perp}$的直和，并且$M^{\perp\perp}=M$.

§67 线性函数

定理. 对于有限维内积空间V的任意线性函数y'，都对应V中唯一的向量y，使得对于所有x，$y'(x)=(x, y)$.

§68 圆括号对方括号

(x, y)代替$[x, y]$. V^*代替V'.

对应于V上的每个线性变换A，我们能由

$$(Ax, y)=(x, A^* y)$$

来定义线性变换A^*. A^*也是V上的线性变换.

$$(\alpha A)^*=\bar{\alpha} A^*, \quad \det A^*=\overline{\det A}.$$

§ 69 自然同构

设y_0是V中的任意元素，有V^*中的线性函数y_0^*与它对应，按$y_0^*(x)=(x, y_0)$定义；依次地，V^{**}中的线性函数y_0^{**}与y_0^*对应，按$y_0^{**}(y^*)=(y^*, y_0^*)$定义。

设y^*是V上的任意线性函数（即V^*的任意元素），我们有

$$y_0^{**}(y^*)=(y^*, y_0^*)=(y_0, y)=y^*(y_0).$$

§ 70 自伴随变换

使得$A=A^*$的线性变换称为自伴随的；在实内积空间中的通常语言是对称的，在复内积空间中是厄米特的.

定理 1．若A与B是自伴随的，则AB（或BA)是自伴随的必要充分条件是 AB=BA（即A与B可交换）.

定理 2．若A是自伴随的，则对于所有的B，B^*AB是自伴随的．若B是可逆的，B^*AB是自伴随的，则A是自伴随的.

$A^*=-A$时，A称为斜对称的（实空间中）或斜厄米特的（复空间中）.

§ 71 配极变换

定理 1．内积空间上的线性变换A是 0 的必要充分条件是，对于所有的x与y，$(Ax, y)=0$.

定理 2．内积空间上的线性变换A是 0 的必要充分条件是，对于所有的x，$(Ax, x)=0$.

定理 3．酉空间上的线性变换A是 0 的必要充分条件是，对于所有的x，$(Ax, x)=0$.

定理 4．酉空间上的线性变换A是厄米特的必要充分条件是，对于所有的x，(Ax, x)是实的.

§ 72 正变换

定义．内积空间上的线性变换A是正的，用记号$A\geqslant 0$，若A是自伴随的，并且，对所有的x，$(Ax, x)\geqslant 0$．正变换通常称为非负变换.

§ 73 等距

满足$UU^*=U^*U=1$的变换为正交的（实空间）或酉的（酉空间）.

定理．关于内积空间上的线性变换U，下面三个条件相互等价.

（1） $U^*U=1$，

（2） $(Ux, Uy)=(x, y)$，对所有的x与y，

（3） $|Ux|=|x|$，对所有的x.

§ 74 正交基的变换

定理1．若$X=\{x_1, \cdots, x_n\}$是n维内积空间V的一正交基，U在V上是酉的，则$UX=\{Ux_1, \cdots, Ux_n\}$也是V的正交基．反之，若U是线性变换，X是一正交基，UX也是一正交基，则U是酉的．

定理2．若A是复n维内积空间V的线性变换，则在V中存在正交基X，使得A在X下的矩阵A是三角型，或者，等价地，若〔A〕是一个矩阵，则存在一个等距的矩阵〔U〕，使得〔U〕$^{-1}$A〔U〕是三角型．

§75　垂直射影

$V=M\oplus M^{\perp}$．射影称为垂直射影．

定理1．线性变换是垂直射影当且仅且$E=E^2=E^*$．垂直射影是正线性变换，并且有性质$|Ex|\leqslant|x|$，对所有的x．

定理2．若线性变换E满足$E=E^2$，并且$|Ex|\leqslant|x|$，对所有的x，则$E=E^*$．

垂直射影E与F是正交的，若$EF=0$．

定理3．两个垂直射影$E=P_M$与$F=P_N$是正交的当且仅当子空间M与N（即，E与F的象）是正交的．

§76　垂直射影的组合

定理1．若$E_1,\cdots,E_n$是垂直射影，则$E=E_1+\cdots+E_n$是垂直射影的必要充分条件是$E_iE_j=0$，$i\neq j$（即，E_i两两正交）．

对于两个垂直射影$E=P_M$与$F=P_N$，当$M\subset N$时，写$E\leqslant F$．

定理2．对于垂直射影$E=P_M$与$F=P_N$，下面的条件相互等价．

(1)　　$E\leqslant F$．

(2)　　$|Ex|\leqslant|Fx|$，对所有的x．

(3)　　$M\subset N$．

(4a)　　$FE=E$．

(4b)　　$EF=E$．

§77　复化

设V是实向量空间，V^+是一切有序对$\langle x, y\rangle$的集合，x与y均在V中．由

$$\langle x_1, y_1\rangle+\langle x_2, y_2\rangle=\langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle$$

定义V^+的两个元素的和．由

$$(\alpha+i\beta)\langle x, y\rangle=\langle \alpha x-\beta y, \beta x+\alpha y\rangle$$

定义V^+的元素与复数$\alpha+i\beta$（α与β是实数，$i=\sqrt{-1}$）的积．V^+对于这样定义的

线性运算作成一个复向量空间．V^+中$y=0$的元素$\langle x, y\rangle$的集合与空间V自然地一一对应，称V^+是V的复化．

写$\langle x, y\rangle$为$x+iy$．

存在一种自然的方式，将V上的线性变换A扩充为V^+上的线性变换A^+，

$$A^+(x+iy)=Ax+iAy.$$

若A是V上的线性变换，A^+有特征向量$x+iy$，属于特征值$\alpha+i\beta$（其中x与y在V中，而α与β是实数），则

$$Ax=\alpha x-\beta y,$$

$$Ay=\beta x+\alpha y,$$

x与y生成的V的子空间在A之下是不变的．

§78 谱的特征

定理1．若A是内积空间的自伴随变换，则A的每个特征值是实的；若A是正的或严格正的，则A的每个特征值分别是正的或严格正的．

定理2．有限维内积空间的自伴随变换的特征方程的每个根是实的．

定理3．酉变换的每个特征值的绝对值是1．

定理4．若A是自伴随的或酉的，则A的属于不同特征值的特征向量是正交的．

定理5．若U是有限维内积空间的酉变换，子空间M在U之下是不变的，则$M^\perp$也是．

定理6．若A是有限维内积空间上的自伴随变换，则A的每个特征值λ_0的代数重数等于它的几何重数（即$Ax=\lambda_0 x$的所有解作成的子空间的维数）．

定理7．若U是有限维酉空间的酉变换，则U的每个特征值的代数重数等于它的几何重数．

§79 谱定理

定理1．对于有限维内积空间上的每个自伴随线性变换，都对应地存在实数α_1，…，α_r与垂直射影E_1，…，E_r（其中r是严格正的整数，且不大于空间的维数）并且

（1）α_j两两不同，

（2）E_j两两正交且异于0，

（3）$\sum_j E_j=1$，

（4）$\sum_j \alpha_j E_j=A$．

表达式$A=\sum_j \alpha_j E_j$（其中α与E满足定理1的条件(1)—(3)）称为A的谱形式.

定理2．若$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j E_j$是有限维内积空间上的自伴随变换A的谱形式，则$\alpha_j$是A的所有不同的特征值.若$1 \leqslant k \leqslant r$，则存在实系数多项式$p_k$，使得$j \neq k$时，$p_k(\alpha_j)=0$，$p_k(\alpha_k)=1$，对于每个这样的多项式，$p_k(A)=E_k$.

定理3．若$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j E_j$是有限维内积空间上的自伴随变换A的谱形式，则线性变换B与A可交换的必要充分条件是B与每个E_j可交换.

§80 正规变换

我们将称线性变换A是正规的，若它与它的伴随变换A^*可交换，$AA^*=A^*A$.

定理1．若A是正规的，则x是A的特征向量的必要充分条件是x是A^*的特征向量；若$Ax=\lambda x$，则$A^*x=\overline{\lambda}x$.

定理2．若A是正规的，则A的属于不同特征值的特征向量是正交的.

定理3．若A是正规的，λ是A的特征值，M是$Ax=\lambda x$的所有解的集合，则M与$M^\perp$同时在A之下不变.

定理4．有限维酉空间上的正规变换是（1）厄米特的，（2）正的，（3）严格正的，（4）酉的，（5）可逆的，(6) 幂等的当且仅当它的所有特征值是（1）实的，（2）正的，（3）严格正的，（4）绝对值为1的，（5）异于零的（6）等于0或1的.

§81 正交变换

设U是有限维实内积空间V上的正交变换，则U在一个基下的矩阵是：主对角线上先有一串+1，再有一串−1，再有一串2×2的块$\begin{pmatrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$，$\alpha^2+\beta^2=1$.

§82 变换的函数

设A是酉空间的正规变换，$\sum_j \alpha_j E_j$是A的谱形式，f是任一个复值函数，至少在点α_j处被定义，则我们按

$$f(A)=\sum_j f(\alpha_j)E_j$$

定义一个线性变换$f(A)$.

§83 极分解

定理1．若A是有限维内积空间上的任意线性变换，则存在唯一确定的正变换P存在酉变换U，使得A＝UP．若A是可逆的，则U也是由A唯一确定的．

U是等距的，P是正的，表达式A＝UP称为A的极分解．

定理2．若 A＝UP 是线性变换A的极分解，则A是正规的必要充分条件是UP＝PU．

§84 交换性

定理1．有限维内积空间上的两个自伴随变换A与B可交换当且仅当存在自伴随变换C，存在两个实变量的实值函数f与g，使得$A=f(C)$，$B=g(C)$．若这样的C存在，我们可以选择C具有形式$C=h(A,B)$，其中h是一个适当的两个实变量的实值函数．

定理2．若A是有限维酉空间上的正规变换，B是与A可交换的任意变换，则B与A^*可交换．

§85 秩为1的自伴随变换

定理1．若A的秩为1，并且是自伴随的（或正的），则在任意正交坐标系下A的矩阵（α_{ij}）由$\alpha_{ij}=\kappa\beta_i\bar{\beta}_j$（或$\alpha_{ij}=\gamma_i\bar{\gamma}_j$）给出，$\kappa$为实数．反之，若〔A〕在某一正交坐标系下有这种形式，则A的秩为1，并且是自伴随的（或正的）．

定理2．若A与B是正线性变换，某个正交坐标系下的矩阵分别是（α_{ij}）与（β_{ij}），线性变换C在相同坐标系下的矩阵是（γ_{ij}），$\gamma_{ij}=\alpha_{ij}\beta_{ij}$，对于一切$i$与$j$，则C也是正的．

第Ⅳ章 分析

§86 向量的收敛

V中的向量序列（x_n）收敛于V中的向量x．

（1）$|x_n-x|\to 0$，$n\to+\infty$；

（2）$(x_n-x,\ y)\to 0$，$n\to\infty$，对于V中每个固定的y．

若（1）正确，对于每个y，我们有

$$|(x_n-x,\ y)|\leqslant|x_n-x|\,|y|\to 0,$$

从而（2）正确，（1）⇒（2）．在有限维空间中，也有（2）⇒（1）．

§87 范数

定义．内积空间V上的线性变换A是有界的，若存在常数κ，使得对于V中的任意的x，$|Ax|\leqslant\kappa|x|$．具有这种性质的所有常数κ的最下界称为A的范数（或界），记作$\|A\|$。

$$\|A\|=inf\ \{\kappa\mid|Ax|\leqslant\kappa|x|，对所有x\}．$$

定理．有限维内积空间上的每个线性变换是有界的．

§88 关于范数的式子

$p=sup\{|Ax|/|x|\ |x\neq 0\}$，

$q=sup\{|Ax|\ |\ |x|=1\}$，

$r=sup\{|(Ax,\ y)|/|x|\ |y|\ |x\neq 0,\ y\neq 0\}$，

$s=sup\{|(Ax,\ y)|\ |\ |x|=|y|=1\}$．

$\|A\|=p=q=r=s$．

（1）　$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$，

（2）　$\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|$，

（3）　$\|aA\|\leqslant|a|\,\|A\|$，

（4）　$\|A^*\|=\|A\|$．

§89 自伴随变换的界

A是自伴随变换．

$\Phi=\{(Ax,\ x)/|x|^2\ |x\neq 0\}$，

$\Psi=\{(Ax,\ x)\ |\ |x|=1\}$，

$\alpha=inf\Phi=inf\Psi$，

$\beta=sup\Phi=sup\Psi$，

$\gamma=max\{|\alpha|,\ |\beta|\}=\|A\|$．

§90 极大原则

定理．设A是有限维内积空间V上的一个伴随变换，λ_1，…，λ_n（不必是不相同的）是A的特征值，且选择$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$的情况．若对于V的每个子空间M，

$\mu(M)=sup\{(Ax,\ x)\ |x在M中,\ |x|=1\}$

并且，对于$k=1$，…，n，

$\mu_k=inf\{\mu(M)\ |\ dimM=n-k+1\}$，

则对于$k=1$，…，n，$\mu_k=\lambda_k$．

§91 线性变换的收敛

线性变换的序列（A_n）收敛于固定的线性变换A．

以下三个条件相互等价：

（1）　$\|A_n-A\|\to 0$，$n\to\infty$；

（2）　$|A_nx-Ax|\to 0$，$n\to\infty$，对每个固定的x；

（3）$|(A_n x, y)-(Ax, y)|\to 0$，$n\to\infty$，对于每对固定的$x$与$y$.

具有下列性质：

（1）若 $A_n\to A$则$\|A_n\|\to\|A\|$；

（2）若$A_n\to A$，且$x_n\to x$，则$A_n x_n\to Ax$；

（3）若$A_n\to A$，则$A_n^*\to A^*$.

§92 遍历定理

定理．若U是有限维内积空间上的一个等距线性变换，M是$Ux=x$的所有解作成的子空间，则由

$$V_n=\frac{1}{n}(1+U+\cdots+U^{n-1})$$

定义的序列当$n\to\infty$时收敛于垂直射影$E=P_M$.

§93 幂级数

A是有限维向量空间上的线性变换，A的范数<1.

$$\sum_{n=0}^{\infty}A^n. \qquad\qquad S_p=\sum_{n=0}^{p}A^n.$$

（1）$(1-A)S_p=S_p-AS_p=1-A^{p+1}$.

（2）$S_p=(1-A)^{-1}(1-A^{p+1})=(1-A^{p+1})(1-A)$.

当$p\to\infty$时，$A^{p+1}\to 0$，从而S_p收敛，有极限$S=(1-A)^{-1}$.

$$S=\sum_{i=0}^{\infty}A^n=(1-A)^{-1}.$$

（摘译自：Paul R. Halmos, Finite-Dimensional Vector Spaces, Springer-Verlag New York, 1974）

（孙宗明）

附录五　数学证明方法

本文简单地叙述数学证明方法.

一　数学证明方法的分类

将数学证明方法分为一般的、较一般的、特殊的三个部分.

人类的认识运动，有由特殊到一般的过程，又有由一般到特殊的过程，在形式逻辑中，前者称为归纳，后者称为演绎．相应地，在数学证明中，就有演绎法和归纳法．归纳法作为数学证明方法，是指的完全归纳法.

要证明一个数学命题，可以对数学命题本身采取两种做法：一种是直接证明命题自身的正确性，另一种是通过证明与要证明的命题等效的其它命题来证明命题自身.相应于前者的数学证明方法称为直接证法，相应于后者的数学证明方法称为间接证法．反证法、同一法、半反证法是几种不同的间接证法.

要证明一个数学命题，都有一个如何思索以求得证明的问题，都有一个从何着手的问题．按照思路的“顺”和“逆”，可分为两种：一种是由命题的条件入手，一步一步地推到结论；一种是由命题的结论入手，一步一步地靠近条件，最后找到结论与条件之间的必然联系．相应的数学证明方法，前者称为综合法，后者称为分析法.

于是，演绎法是相对于归纳法而言的，直接证法是相对于间接证法而言的，综合法是相对于分析法而言的．这三对六种证明方法，是一般的、应用广泛的证明方法，归入一般的证明方法这一类中.

数学归纳法是一种变态的演绎法，对于证明与自然数有关的数学命题而言，它是基本的、有力的方法．这种证明方法，就整个证明过程而言，它是归纳的，所以有归纳法的名字，但它又不同于完全归纳法，因此称之为数学归纳法．数学归纳法主要是第一数学归纳法、第二数学归纳法，其次是反向归纳法、多重归纳法，无穷递降法等.

轮换证法是与分断式命题相联系的一种证明方法，而分断式命题是一类十分重要要的命题，它全面地反映了所研究的对象的性质.

数学归纳法，轮换证法归入较一般的证明方法这一类中.

其余的证明方法都归入特殊的证明方法这一类中．它们或是上述一般的或较一般的证明方法的推论，或是某一种证明的技巧．就它们的使用范围来说，或是属于一个小范围的证明方法，或是为了证明某个问题而创造的证明方法.

二　一般的数学证明方法

要证明数学命题$A\Rightarrow B$．演绎法的方法是：选择论据$A_1\Rightarrow B_1$作为推理的前提，而且有$A\Rightarrow A_1$，根据演绎推理三段论，得出$A\Rightarrow B_1$；再选择论据$A_2\Rightarrow B_2$为

推理前提，而且有$B_1 \Rightarrow A_2$，根据演绎推理三段论，得出$B_1 \Rightarrow B_2$；如此下去，得出$B_{n-1} \Rightarrow B_n$，$B_n \Rightarrow B$．从而，有一系列：$A \Rightarrow B_1$，$B_1 \Rightarrow B_2$，…，$B_{n-1} \Rightarrow B_n$，$B_n \Rightarrow B$，根据推理的传递性，得出$A \Rightarrow B$．不难看出，大部分已经做过的数学证明，都是这样进行的．

数学证明中的归纳法，就是完全归纳法．不完全归纳法不能作为数学证明方法，而只能作为一个发现新问题的推理方法．要证明数学命题$A \Rightarrow B$，完全归纳的方法是：将总体区分为若干种情况A_1，A_2，…，A_n，这些情况合起来就构成了A的全部，称为A的一个分划，记为$A \Leftrightarrow A_1$，A_2，…，A_n．对每种情况证明命题成立，即$A_1 \Rightarrow B$，$A_2 \Rightarrow B$，…，$A_n \Rightarrow B$，根据完全归纳法原理，得出$A \Rightarrow B$．顺便指出，完全归纳法有助于培养缜密的思考方法，十分重要。

要证明数学命题$A \Rightarrow B$，直接由$A \Rightarrow B$入手进行证明，就是说，取公理、已有的定义和定理作论据，由条件A出发进行逻辑推理，一直到结论B．从而达到证明的目的．这样的证明方法称为直接证法．在数学证明中，尤其是初等数学的证明中，直接证法占的比重较大．

要证明数学命题$A \Rightarrow B$，采用直接证法来证较为困难或暂时不可能，则改而证明与$A \Rightarrow B$等效的其它命题，从而得以证明$A \Rightarrow B$，间接地达到证明的目的．这样的证明方法称为间接证法．间接证法有反证法、半反证法和同一法等．

应用反证法来证明数学命题$A \Rightarrow B$，是通过证明与其等效的命题$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$来达到证明目的的．由于从结论$B$的反面$\bar{B}$出发，所以称为反证法．应用反证法证明问题，大体可分为四步：1）分析要证明的命题，明确其条件和结论，把命题明确地写为$A \Rightarrow B$的形式，A为条件，B为结论；2）确定$\bar{B}$，亦即假定结论B不成立；3）由$\bar{B}$出发，根据公理、已有的定义与定理，并使用命题的条件A，应用正确的推理方法，一直到得出矛盾的结果，所谓矛盾的结果是指：与已知条件A相矛盾，与已知的定义、公理、定理相矛盾，得出两个矛盾的结果，得出自相矛盾的结果等；4）在确认所作逻辑推理无误的情况下，指出所做的假设$\bar{B}$不成立，从而，根据形成逻辑的排中律，确立B成立。

对于满足“同一原理”的命题，可以用“同一法”证明．所谓“同一原理”是指：如果一个命题的条件和结论都唯一存在，它们所指的概念是同一概念，那么这个命题和它的逆命题等效．对于满足“同一原理”的命题，通过证明逆命题来证明命题自身，称为“同一法”．初等几何中，常常用“同一法”来证明“某图形具有某种性质”这类命题，命题中的“某种性质”是“唯一存在的”．

所谓综合法，是从命题的条件出发，经过一步一步的逻辑推理，最后达到要证的

结论．用综合法证明命题“若A则B”的理路是：$A \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$，即“由因求果”．用综合法证明，每一步推理都是寻找必要条件，最后达到要证的结论．

所谓分析法，是从命题的结论出发，一步一步地探索结论得以成立的条件，最后达到命题的已知条件.用分析法证明命题“若A则B”的理路是：$B \Leftarrow C \Leftarrow \cdots \Leftarrow A$，即“执果索因”．用分析法进行证明，每一步推理都是寻找充分条件，最后找到要证命题的已知条件．

于是，综合法顺，而分析法逆；综合法宜于表述，而分析法利于思考；综合给人以条理清晰的知识，而分析法使人知道证明是如何得出的；综合法便于书面阐述，而分析法便于口头阐述．两者各有利弊，经常在证明时合并使用，互相补充．一般说来，对于一个要证明的数学命题，大多是用分析法求得解决的办法，而后用综合法条理地表达出来．

三　较一般的数学证明方法

数学归纳法是一种较一般的证明方法．根据最小数原理，利用反证法，可以证明下面的两个定理．

第一数学归纳法原理．要证明与自然数有关的命题$N(n)$对一切自然数n成立，只要证明：1）$N(1)$成立；2）在$N(k)$（$k \geqslant 1$）成立的假定下，证明$N(k+1)$成立．

第二数学归纳法原理．要证明与自然数关的命题$\mathrm{N}(n)$对一切自然数n成立．只要证明：1）$\mathrm{N}(1)$成立；2）在$\mathrm{N}(x)(1 \leqslant x \leqslant k)$成立的假定下，证明$\mathrm{N}(k+1)$成立．

轮换证法是用来证明分断式命题可逆性时用的一种证明方法．

假如n个命题的条件和结论所论及的事项都面面俱到而且互不相容，把这n个命题合起来组成一个命题N.则N称为分断式命题.N的逆命题N'也组成一个分断式命题．图示为

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \Rightarrow B_1 \\ A_2 \Rightarrow B_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n \Rightarrow B_n \end{array}\right\} \text{组成} N, \qquad \left.\begin{array}{l} B_1 \Rightarrow A_1 \\ B_2 \Rightarrow A_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_n \Rightarrow A_n \end{array}\right\} \text{组成} N'.$$

轮换证法从形式上看就是反证法，从略．用轮换证法可以证明$N \Leftrightarrow N'$，从略．因此，若命题是由分断式命题组成的必要充分条件时，则只须证明一方即可。这是一个基本的知识．

四　特殊的数学证明方法

特殊的证明方法很多，这里仅介绍常用的两种：循环证法，抽屉证法．

如果要证明若干个数学命题相互等价，可以将这些命题排成一个顺序：A_1

A_2，…，A_n。从 A_1 开始，以A_1为条件证A_2，以A_2为条件证A_3，…，以A_{n-1}为条件证A_n，以A_n为条件证A_1^*，回到A_1终止．若将A_1，A_2，…，A_n依次放于一个圆周上，则上述过程正是：由A_1出发沿一个方向绕圆一周又回到A_1，所以，称为循环证法，或称为转圈证法．

对于A_1，A_2，…，A_n实行了循环证法之后，其中的任两个就相互等价了．例如，A_i与A_j两个命题，$1 \leqslant i < j \leqslant n$．实际上有：1）$A_j \Rightarrow A_i$，这是由于$A_j \to A_{j+1} \to \cdots \to A_n \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to \cdots \to A_{i-1} \to A_i$，根据传递性，得到$A_j \Rightarrow A_i$；2）$A_i \Rightarrow A_j$，这是由于$A_i \to A_{i+1} \to \cdots \to A_j$，根据传递性，得到$A_i \Rightarrow A_j$．从而就有$A_i \Leftrightarrow A_j$．

抽屉证法是由抽屉原则给出的一种证明方法．

抽屉原则．若n个抽屉中放入$n+1$件或多于$n+1$件东西，则，至少有一个抽屉里放两件东西．

抽屉证法是证明一类特殊的数学命题的有效方法．这类数学命题的一个共同特点是：结论形式有"至少有两个…，使它们的…"．其一般步骤是：第一步，依对象的一种性质，设计n个抽屉；第二步，确定对象的数目多于n个；第三步，由抽屉原则得出结论。

参 考 文 献

〔1〕孙宗明，数学归纳法原理的直接证法及其相互等价性，山东师大学报（自然科学版），1981年第2期。

〔2〕孙宗明，略谈数学的创造性学习方法，泰安师专学报（自然科学版），1985年．

〔3〕孙宗明，略谈数学命题的获得过程，吉安师专学报（自然科学版），1986年第1期．

〔4〕廖祖纬、张锦文，逻辑代数，科学出版社，1984．

（孙宗明）

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝高等代数的内容与方法
作者＝孙宗明主编　叶伯诚　乔凤珠　张纯伯副主编
页数＝４６４
ＳＳ号＝１１７６１０６４
出版日期＝１９９０年０９月第１版